

Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования
«НАУЧНО-ТЕХНОЛОГИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ «СИРИУС»

На правах рукописи



Суменков Олег Юрьевич

Методы, алгоритмы и программные средства повышения точностных характеристик
промышленных манипуляторов

2.3.1. Системный анализ, управление и обработка информации, статистика

Диссертация
на соискание учёной степени
кандидата технических наук

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент
Гусев Сергей Владимирович

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение	4
ГЛАВА 1. Обзор литературы	12
1.1. Кинематические модели как необходимый этап решения задач калибровки манипуляторов	12
1.2. Классификация методов калибровки промышленных манипуляторов	15
1.3. Управление манипуляторами в скользящих режимах: частотные методы анализа и синтеза	18
ГЛАВА 2. Кинематические модели и методы их параметрического пересчета	21
2.1. Постановка задачи	21
2.2. Основные кинематические модели	22
2.2.1. Представление Денавита–Хартенберга	22
2.2.2. Модель Хаяти	24
2.2.3. Полная и параметрически непрерывная модель	25
2.2.4. Модель на основе произведения матричных экспонент	26
2.3. Аналитические алгоритмы пересчета моделей	28
2.3.1. Пересчет модели на основе произведения матричных экспонент в полную и параметрически непрерывную модель	29
2.3.2. Пересчет модели на основе произведения матричных экспонент в модель Хаяти	33
2.3.3. Пересчет параметров полной и параметрически непрерывной модели и модели Хаяти в модель на основе произведения матричных экспонент	36
2.3.4. Пересчет полной и параметрически непрерывной модели в модель Хаяти	37
2.4. Иллюстративный пример	37
2.5. Экспериментальный пример: пересчет параметров в задаче кинематической калибровки	43
ГЛАВА 3. Кинематическая калибровка промышленных манипуляторов без внешних измерительных устройств	47
3.1. Постановка задачи	47
3.2. Метод калибровки без внешних измерительных устройств	47
3.3. Верификация алгоритма в моделировании	51
3.4. Калибровка промышленного манипулятора на примере ABB IRB 1600	55
3.4.1. Эксперимент	57
ГЛАВА 4. Частотный метод синтеза непрерывных скользящих режимов для динамических систем специального вида	64

4.1.	Предварительные сведения	64
4.2.	Постановка задачи	65
4.3.	Методология	66
4.3.1.	Метод на основе кривой разгона	66
4.3.2.	Критерий Лозба	68
4.3.3.	Средняя мощность	69
4.4.	Анализ чаттеринга в замкнутой системе	70
4.4.1.	Анализ на основе уравнения гармонического баланса для непрерывного по Липшицу регулятора на скользящем режиме	71
4.4.2.	Анализ чаттеринга на основе уравнения гармонического баланса для алгоритма «Супер-Скручивания»	72
4.5.	Эксперименты	74
4.5.1.	Управление скоростью ДПТ	74
4.5.2.	Управление положением ДПТ	77
4.5.3.	Управление приводом манипулятора на примере ABB IRB 1600	84
	Заключение	92
	Список сокращений и условных обозначений	93
	СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ	95

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы исследования

Точность позиционирования промышленных манипуляторов — ключевой фактор надежности и экономической эффективности роботизированных технологических процессов, особенно в авиакосмической промышленности, атомной энергетике, прецизионном машиностроении и ряде других сфер. В этих отраслях даже субмиллиметровые отклонения способны приводить к критическому снижению качества продукции, росту брака или аварийным ситуациям.

Современные манипуляторы демонстрируют высокую повторяемость позиционирования (например, у модели ABB IRB 1600 она составляет 0,05 мм), однако абсолютная точность на практике не может быть гарантирована ни при вводе оборудования в эксплуатацию, ни в ходе длительной работы в силу влияния различных факторов, которые принято подразделять на производственные и эксплуатационные.

К первым относятся погрешности изготовления компонентов и дефекты сборки манипуляторов. Ко вторым — износ и отклонения осей вращения сочленений от номинального положения, изменение длин звеньев (геометрические ошибки), изменение тензоров инерции звеньев, коэффициентов демпфирования и жесткости шарниров (динамические ошибки), а также воздействие сил трения различной природы в шарнирах, изменение параметров редукторов, влияние различных нелинейных эффектов, проявляющихся при выполнении движений.

Существенная часть ошибки позиционирования манипулятора вызывается изменением его геометрических параметров. Именно поэтому с массовым появлением манипуляторов на производствах возникла насущная потребность в полной или частичной компенсации перечисленных явлений путем *калибровки* кинематической модели робота, то есть уточнения геометрических параметров, используемых при планировании движения и непосредственном управлении.

В свою очередь, динамические параметры зачастую сложнее идентифицировать в точности и для их компенсации, так же как и для означенных выше нелинейных эффектов, целесообразно применять робастные системы управления, синтез которых также является актуальной задачей, особенно при наличии встроенной системой управления приводом манипулятора.

Степень разработанности темы исследования

Кинематическая калибровка манипулятора подразделяется на следующие этапы [1]: моделирование, измерения, идентификация и коррекция.

Этап *моделирования* подразумевает выбор конкретной кинематической модели — отображения из пространства конфигураций шарниров и геометрических параметров манипулятора в позу (положение и ориентацию) системы координат, связанной с концом инструмента, в рабочем (декартовом) пространстве. Для наиболее распространенной модели —

Денавита–Хартенберга (Denavit–Hartenberg) — был обнаружен [2, 3] существенный недостаток для задач калибровки и идентификации параметров манипулятора — сколь угодно малые изменения в геометрии манипулятора вызывают скачок параметров модели для соседних номинально параллельных шарниров.

Впоследствии были предложены альтернативные способы параметризации кинематики [2, 4–8]. Как в ранних моделях [1, 2, 8], так и в более поздних [9–12] отмечалось, что результат калибровки для конкретного кинематического представления может *существенно отличаться*, в частности из-за численных методов. Отсюда возникла актуальная задача: как пересчитать одну кинематическую модель в другую [8, 13], и в ряде работ [8, 13–16] такие пересчеты были осуществлены, но *лишь для части* распространенных параметризаций.

На этапе *измерения* в зависимости от типа калибровки [17] (с использованием внешних измерителей — open-loop, или с помощью внешних ограничений — close-loop) определяются и фиксируются либо позы инструмента (ее компоненты), и конфигурации (координаты шарниров) манипулятора, либо только конфигурации. В качестве внешних высокоточных измерителей обыкновенно применяют лазерный трекер [12, 18–21], системы технического зрения [22–25] и координатно-измерительные машины [26–28]. В качестве внешних ограничений — когда инструмент вместе с ограничением формирует замкнутую кинематическую цепь (close-loop) — наиболее часто применяются точечный контакт [29, 30], плоскости [31–36] и др. [37–39]. Данный класс методов хорошо зарекомендовал себя в условиях, когда использование высокоточного метрологического оборудования невозможно или нецелесообразно по требованиям технологического процесса. Однако в указанных выше работах параметры ограничений (в частности, положение и ориентация) предполагались полностью известными и определялись элементами стороннего оборудования, *не входящего в состав робототехнической ячейки*. Преодоление указанного ограничения положено в основу разрабатываемого в диссертационном исследовании метода.

На этапе *идентификации* в зависимости от типа калибровки задача оптимизации формируется таким образом, чтобы либо уменьшить рассогласование между измерениями, полученными с помощью внешних измерителей, и позой манипулятора, полученной с помощью модели, либо обеспечить, чтобы позы манипулятора, полученные с помощью искомых кинематических параметров, удовлетворяли внешним ограничениям, например, все принадлежали одной плоскости. В последнюю очередь, кинематические параметры реального робота *корректируются* в соответствии с ранее полученным решением оптимизационной задачи.

Применительно к задаче управления движением в условиях возмущений, немоделируемой динамики и других нелинейных эффектов в работе рассматриваются регуляторы на скользящих режимах, что обусловлено их высокой робастностью [40, 41]. Для управления приводом манипулятора среди таких регуляторов целесообразно выделить алгоритм «Супер-Скручивания», предложенный А. Левантом [42]. Данный алгоритм формирует непрерывный сигнал управления и, реализуя скользящий режим второго порядка, обеспечивает сходимость как положения, так и скорости при измерении только положения. Это свойство является существенным, поскольку в известных работах [43–47] в качестве разрывного управления использовался момент на валах двигателей либо требовалось его непосредственное измерение (по токам в приводах), что для

ряда промышленных манипуляторов невыполнимо. Указанные особенности способствовали его широкому использованию в различных приложениях [48—52].

Однако даже при *непрерывном сигнале управления* в системе с неидеальностями неизбежно возникают [53] высокочастотные колебания, называемые чаттерингом. Полностью устранить их невозможно, но амплитуду можно регулировать путем настройки коэффициентов регулятора [54]. В данной задаче хорошо зарекомендовали себя частотные методы: метод описывающей функции (гармонической линеаризации) и гармонического баланса [55—57], а также метод годографа возмущенной релейной системы [58—60].

В частности, частотные методы применялись для анализа и синтеза различных типов регуляторов на скользящих режимах, в том числе и для алгоритма «Супер-Скручивания» [61—66]. В [67, 68] для объекта управления в виде чистого интегратора коэффициенты алгоритма «Супер-Скручивания» корректировались с целью минимизации чаттеринга при различных неидеальностях, таких как звено чистого запаздывания или критически демпфированное звено второго порядка.

Однако аналитические выражения для оценки амплитуды и частоты чаттеринга получены в предположении, что динамика системы описывается моделью идеального интегратора. Данное ограничение существенно сужает область применения этих результатов и оставляет открытым вопрос об их использовании для управления динамическими объектами, в частности приводами промышленных манипуляторов.

Цель и задачи работы

Целью диссертационного исследования является разработка методов, алгоритмов и программных средств повышения точностных характеристик промышленных манипуляторов на основе улучшения кинематической модели и методов робастного управления движением.

Для достижения поставленной цели в работе решаются следующие задачи:

1. Разработать аналитические алгоритмы взаимного пересчета параметров кинематических моделей промышленного манипулятора и выполнить их программную реализацию.
2. Предложить метод автоматизированной кинематической калибровки манипулятора с использованием ограничений в виде плоскостей и электрического контакта, включающий процедуры сбора данных, идентификации параметров и коррекции модели. Экспериментально подтвердить его работоспособность на промышленном манипуляторе.
3. Развить методику настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания», основанную на идентификации устойчивой системы в специальной форме и обеспечивающую минимальную амплитуду высокочастотных колебаний (чаттеринга) выходного сигнала.
4. Адаптировать предложенную методику настройки алгоритма «Супер-Скручивания» к задаче управления скоростью звеньев промышленного манипулятора с учетом наличия встроенной системы управления.

5. Провести экспериментальную проверку предложенных методов, методик, алгоритмов и их программных реализаций.

Объектом исследования является промышленный манипуляционный робот с последовательной кинематикой при выполнении технологических операций, связанных с перемещением рабочего органа по заданным точкам и траектории.

Предметом исследования являются методы кинематической калибровки, модели кинематики и алгоритмы робастного управления, обеспечивающие повышение точности позиционирования и стабилизацию движения промышленного манипулятора.

Научная новизна исследования

1. Впервые разработаны аналитические алгоритмы взаимного пересчета параметров между четырьмя распространенными кинематическими моделями: моделью Хаяти (НАУ), полной параметрически непрерывной моделью (СРС) и моделью на основе произведения матричных экспонент (РОЕ), в частности РОЕ–СРС, РОЕ–НАУ и НАУ–СРС. Для предложенных алгоритмов аналитически доказана точность преобразования, что устраняет необходимость применения численных процедур и связанных с ними погрешностей.
2. Предложен новый метод автоматизированной кинематической калибровки манипулятора и вспомогательного оборудования (робота-позиционера) в составе роботизированной ячейки, основанный на электрическом контакте и ограничениях в виде плоскостей. В отличие от известных подходов, он не требует применения дорогостоящих внешних измерительных систем и позволяет одновременно калибровать параметры обоих объектов.
3. Разработана методика настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания», которая в отличие от существующих подходов использует идентификацию устойчивой системы в специальной форме и позволяет минимизировать амплитуду высокочастотных колебаний (чаттеринга) выходного сигнала.
4. Впервые выполнена адаптация указанной методики настройки алгоритма «Супер-Скручивания» для промышленных манипуляторов, в которых управление осуществляется по скорости и/или положению. Это расширяет область применения робастных регуляторов данного класса на реальные промышленные объекты с учетом их встроенной системы управления.

Теоретическая и практическая значимость работы

Теоретическая значимость диссертационного исследования состоит в аналитическом обосновании точности взаимного пересчета параметров кинематических моделей манипуляторов, выполненном с использованием аппарата теории групп Ли, а также в разработке методики настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания», которая, в отличие от известных подходов, ориентированных на объекты управления, описываемые чистым интегратором,

позволяет минимизировать амплитуду высокочастотных колебаний (чаттеринга) применительно к более общему случаю аperiodического звена первого порядка с запаздыванием.

Практическая значимость работы определяется тем, что предложенные алгоритмы калибровки, методика настройки регулятора и их программные реализации позволяют повысить точность позиционирования промышленных манипуляторов только за счет использования разработанных программных средств, без привлечения дорогостоящего внешнего измерительного оборудования. Разработанный метод калибровки, основанный на электрическом контакте и ограничениях в виде плоскостей, может быть непосредственно интегрирован в существующие роботизированные ячейки и использован для одновременной калибровки манипулятора и вспомогательного оборудования в автоматическом режиме. Это делает предложенный подход доступным для внедрения на предприятиях различного профиля, в том числе с ограниченным бюджетом на метрологическое обеспечение, а также на производствах с агрессивной внешней средой, где присутствие человека нежелательно.

Значимость работы также подтверждена участием в научно-исследовательском проекте № 23-79-10213 «Разработка методов интеллектуального управления робототехнической системой в условиях меняющейся внешней среды для автоматической сборки», 2023–2026 гг. (РНФ, Основной исполнитель).

Соответствие паспорту специальности

Тема и результаты диссертации соответствуют паспорту научной специальности 2.3.1 — «Системный анализ, управление и обработка информации, статистика» в части разработки и исследования методов, алгоритмов и калибровки, идентификации параметров и управления промышленными манипуляторами, а также соответствующего программного обеспечения.

Методология и методы исследования

Теоретическую и методологическую основу диссертационного исследования составили методы системного анализа, теории автоматического управления, математического моделирования и численные методы оптимизации.

Для аналитического обоснования точности взаимного пересчета параметров кинематических моделей манипуляторов использовались положения теории групп Ли и аппарат матричных экспонент. При разработке методики настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания» применялись частотные методы анализа нелинейных систем, в том числе метод гармонического баланса и описывающей функции. Задачи кинематической калибровки решались с использованием методов нелинейной оптимизации.

Экспериментальные исследования на промышленном манипуляторе проводились с применением разработанных программных средств, реализованных в средах MATLAB, RobotStudio.

Положения, выносимые на защиту

1. Аналитические преобразования параметров кинематических моделей манипуляторов, охватывающие модель Хаяти, полную параметрическую непрерывную модель, модель на основе произведения матричных экспонент и представление Денавита–Хартенберга, и реализованные на их основе алгоритмы.
2. Метод автоматизированной калибровки кинематических параметров манипулятора в составе роботизированной ячейки на основе электрического контакта и ограничений в виде плоскостей.
3. Методика и программная реализация настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания», использующая идентификацию устойчивой системы в специальной форме и гарантирующая наименьшую амплитуду колебаний выхода системы.
4. Адаптация и программная реализация предложенной методики для промышленных манипуляторов, в которых осуществляется управление скоростью звена.

Степень достоверности и апробация результатов работы

Достоверность полученных результатов обеспечивается математически строгими доказательствами для алгоритмов пересчета параметров кинематических моделей, применением апробированных частотных методов анализа и синтеза, а также согласованностью теоретических утверждений с результатами компьютерного моделирования и натурных экспериментов.

Основные результаты работы были представлены на следующих конференциях:

- «Всероссийской конференции молодых ученых-механиков имени академика Г. Г. Черного», Пансионат МГУ «Буревестник», Сочи, 2023;
- 9th International Conference on Interactive Collaborative Robotics», Мехико, Мексика, 2024;
- 17th International Workshop on Variable Structure Systems and Sliding Mode Control (VSS), Абу-Даби, ОАЭ, 2024;
- International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM), Сочи, 2025
- 43th International Conference on Robotics and Automation (ICRA), Вена, Австрия, 2026;

а также на школе-конференции «Современные методы робототехники и теории управления», федеральная территория «Сириус», 2025; «Зимней онлайн школе автоматизации и робототехники» ИШИТР ТПУ, Томск, 2025; семинарах направления «Математическая робототехника» НЦ ИТиИИ Университета «Сириус». Часть результатов диссертации использованы в работах по проекту, реализуемого в рамках государственной программы федеральной территории «Сириус» «Научно-технологическое развитие федеральной территории «Сириус» (Соглашение № 18-03 от 10.09.2024).

Личное участие автора

Все основные результаты диссертационного исследования получены автором лично. Постановка задач и общее научное руководство осуществлялись научным руководителем С. В. Гусевым. В работах [11, 69] научному руководителю принадлежат постановка задачи, определение методологии исследования и консультативное участие. Разработка алгоритмов, методика валидации, проведение численных экспериментов и подготовка текстов выполнены автором лично. Экспериментальные исследования проводились совместно с Д. Д. Кульминским. В работах [70, 71], все теоретические результаты, алгоритмы и текст получены автором самостоятельно. В работах по управлению на скользящих режимах [72—74] общая постановка задачи и редактирование текстов выполнялись совместно С. В. Гусевым и Л. М. Фридманом. Теоретическое и методологическое руководство исследованиями в этой части осуществлялось Л. М. Фридманом, включая выбор направления исследований, обсуждение и корректировку математических выкладок. Теоретические результаты получены автором совместно с соавторами; личный вклад автора заключается в разработке, анализе алгоритмов управления и проведении численных экспериментов. Экспериментальная проверка в [72, 73] выполнена автором самостоятельно, в [74] — совместно с Т. Н. Медведевой; анализ чаттеринга для непрерывного по Липшицу регулятора на скользящем режиме выполнен автором лично.

Публикации

По результатам диссертационного исследования опубликованы 4 статьи в рецензируемых изданиях, индексируемых в базах данных Scopus и Web of Science, тезисы докладов конференций, индексируемых в этих же базах данных, а также получен патент на изобретение:

1. **Sumenkov O.** Analytical Parameter Conversion of CPC and POE Models. // IEEE Robotics and Automation Letters. — 2026. — Т. 11. — № 2 — С. 1306-1313. — DOI: 10.1109/LRA.2025.3641122.
2. **Sumenkov O. Yu.**, Medvedeva T. N., Fridman L. M. Revisiting reaction curve-based tuning method for continuous sliding mode controllers: frequency domain analysis. // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2026. — Т. 22. — № 1 — С. 117-138. — DOI: 10.20537/nd260306.
3. **Sumenkov O.**, Medvedeva T., Gusev S., Fridman L. Super-Twisting Algorithm gain adjustment strategy for manipulator position control. // Lecture Notes in Computer Science (eds. Ronzhin A. et al, ICR2024). — 2024. — Т. 14898. — С. 15-29. — DOI: 10.1007/978-3-031-71360-6_2.
4. **Sumenkov O. Yu.**, Kulminskiy D. D., Gusev S. V. Kinematic calibration of industrial manipulator without external measurement devices. // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2024. — Т. 20. — № 5 — С. 979-1001. — DOI: 10.20537/nd241003.
5. Тезисы 17th International Workshop on Variable Structure Systems and Sliding Mode Control (VSS 2024). Medvedeva, T., **Sumenkov, O.**, and Fridman, L., Step-Test Based Procedure for Super-Twisting Algorithm Gains Adjustment // In *Proc. 17th Int. Workshop Variable Structure Syst. (VSS)*, 2024, С. 158–163. — DOI: 10.1109/VSS61690.2024.10753407.

6. Тезисы The International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM 2025). **Sumenkov O.** Practical Aspects of Automated Manipulator Calibration With Plane Constraint // *In Proc. of International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. – 2025. – С. 924-929. — DOI: 10.1109/ICIEAM65163.2025.11028316.
7. Патент РФ № 2810082 С1, МПК В25J 19/02, В23Q 17/22. Система и способ калибровки кинематических параметров роботизированного манипулятора : заявл. 29.12.2022 : опубл. 21.12.2023 / Кульминский Д.Д., Гусев С.В., **Суменков О.Ю.**; патентообладатель Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Научно-технологический университет «Сириус».

Структура и объём работы

Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения, списка сокращений и условных обозначений и списка литературы. Общий объём работы составляет 106 страниц, включая 45 рисунков, 20 таблиц и 165 наименований в списке литературы. Ниже кратко охарактеризовано содержание глав.

В главе 1 представлен обзор литературы, в котором рассмотрены роль кинематических моделей в задачах калибровки манипуляторов, классификация существующих методов калибровки — как с использованием внешних измерительных устройств, так и без них, — а также применение частотных методов анализа и синтеза скользящих режимов, в том числе для управления приводами.

Глава 2 посвящена алгоритмам аналитического пересчета кинематических моделей РОЕ–СРС, РОЕ–НАУ, СРС–НАУ, СРС–РОЕ и НАУ–РОЕ. Корректность алгоритмов подтверждена теоретически и результатами моделирования, а возможность практического применения продемонстрирована в эксперименте по калибровке манипулятора ABB IRB 1600.

В главе 3 рассматривается задача калибровки кинематических параметров манипулятора при отсутствии внешних измерительных устройств. Предложено решение, основанное на использовании электрического контакта и ограничений в виде плоскостей, позволяющее восстановить параметры как манипулятора, так и вспомогательного оборудования. Работоспособность предложенного подхода подтверждена экспериментально.

Глава 4 содержит методику анализа и синтеза системы специального вида, замкнутой непрерывным регулятором в скользящем режиме, с использованием частотных методов. Методика сформулирована в общем виде на основе FOPDT-аппроксимации. Показано ее применение к задачам управления приводом манипулятора; экспериментальная проверка выполнена для систем управления двигателем постоянного тока по скорости и положению, а также для привода манипулятора ABB IRB 1600.

ГЛАВА 1. Обзор литературы

1.1. Кинематические модели как необходимый этап решения задач калибровки манипуляторов

Эффективность решения задач калибровки, планирования траекторий и управления движением для манипуляторов с последовательными звеньями зависит, в том числе от выбора подходящей кинематической модели. Среди многочисленных предложенных к настоящему времени формализмов модель Денавита–Хартенберга (Denavit–Hartenberg, ДН) является одной из самых ранних и наиболее значимых [75]. Несмотря на появление множества альтернатив, представление ДН продолжает служить определенным стандартом в робототехническом сообществе [11, 27, 38, 76, 77]. Его статус общепринятого подхода объясняется, во-первых, использованием наименьшего возможного числа параметров для перехода между системами координат соседних звеньев, что обеспечивает теоретически максимальную скорость вычислений при реализации на контроллере, а во-вторых — наличием систематической методологии назначения связанных со звеньями систем координат.

Со времени формализации задачи калибровки [78] модель ДН широко использовалась для ее решения применительно к промышленным манипуляторам [79—81] на протяжении нескольких десятилетий.

Впоследствии в работе [2] был отмечен существенный недостаток модели ДН, а именно: если при проектировании манипулятора предполагается, что оси соседних шарниров параллельны (*номинально параллельны*), то малые отклонения реальной геометрии от номинальных значений приводят к скачкообразному изменению соответствующих параметров ДН. Это явление, называемое *параметрической сингулярностью*, существенно образом усложняет процесс идентификации параметров.

Несколько позднее в [82] были сформулированы два основных критерия «хорошей» кинематической модели: *параметрическая непрерывность* (которая изначально была названа *пропорциональностью*) и *полнота*. Именно нарушение пропорциональности проявляется в виде параметрической сингулярности: свойство требует, чтобы малым изменениям физической геометрии робота соответствовали малые изменения параметров модели. Свойство полноты допускает произвольное размещение абсолютной системы координат и произвольное назначение нулевого положения всех шарниров манипулятора [1].

В данной работе было строго показано, что представление ДН не обладает ни свойством *полноты*, ни свойством *параметрической непрерывности*. Этот факт послужил стимулом к разработке альтернативных кинематических моделей, призванных устранить указанные недостатки. Среди примечательных примеров можно выделить S-модель [5], которая дополняет модель ДН двумя параметрами для достижения свойства *полноты* и обеспечения достаточно гибких правил назначения систем координат соответствующих звеньев; модель Бу [6]; а также

модель «Zero-Reference» (ZR), сформулированную в [4] с использованием формулы Родрига, которая гарантирует *параметрическую непрерывность*.

Среди предложенных методологий выделяется модель Хаяти (Hayati, HAY) [2], поскольку она может рассматриваться как естественное расширение представления ДН. В частности, было предложено ввести в модель ДН дополнительный поворот вокруг оси y исключительно для пар последовательных шарниров с номинально параллельными осями. Для всех прочих соединений сохраняется стандартное описание в параметрах ДН. В [2] было доказано, что малые отклонения параметров предложенной модели позволяют описывать малые отклонения в положении и ориентации двух последовательных звеньев, то есть обеспечивается *параметрическую непрерывность*. Модель Хаяти по-прежнему популярна [83—85], так как она интуитивна, минимальна и требует небольших модификаций по сравнению с исходным ДН, обеспечивая при этом свойство *параметрической непрерывности*.

Однако ни в модели ДН, ни в модели HAY системы координат $\{Base\}$ и $\{Tool\}$ не могут быть выбраны произвольно — они диктуются определенными правилами назначения — свойство *полноты* [82] не выполняется.

Вследствие этого возникла потребность в кинематическом соглашении, аналогичном модели ДН, но обладающем одновременно свойствами *параметрической непрерывности* и *полноты*. Этому требованию удовлетворяет полная и параметрически непрерывная модель (Complete and Parametrically Continuous, CPC), предложенная в [8, 86]. Данный формализм основан на теоретически минимальном четырехпараметрическом представлении прямой [87], гарантирующем *параметрическую непрерывность*. Для выполнения критерия *полноты* модель включает также два дополнительных параметра для определения систем координат $\{Base\}$ и $\{Tool\}$ произвольным образом.

В то же время некоторые исследователи [88, 89] рассматривали *минимальность* — модель должна включать *минимальное* число параметров [90] — как третье свойство «хорошей» кинематической модели [1]. Изучалось влияние этого свойства на калибровку и идентификацию роботов. В [89] было строго установлено максимальное число параметров, которые могут быть идентифицированы *независимо* от выбора модели.

Затем в [90] с использованием инструментов дифференциальной геометрии было показано, что кинематические модели с избыточным числом параметров *всегда* обладают параметрической сингулярностью в силу топологических причин [91, 92], связанных с отображением евклидовых пространств на сферы.

В частности, для CPC модели *непрерывность* достигается ценой семи параметров (избыточных) и не вполне произвольного выбора систем координат: ось z_i каждого шарнира должна лежать в верхней полуплоскости относительно предыдущей системы координат $\{i-1\}$ [8].

Однако в [90] не учитывалось гладкое отображение между алгебрами и группами Ли. Это отображение легло в основу модели произведения матричных экспонент (Product of Exponentials, POE) [7] и обеспечивает ее *параметрическую непрерывность*. Позднее в [20, 93] модель была усовершенствована с целью обеспечения *минимальности* без параметрических сингулярностей.

В рамках модели POE системы координат $\{Base\}$ и $\{Tool\}$ для записи преобразования прямой кинематики выбираются произвольно. Прямая кинематика в POE описывает перемещение

системы координат $\{Tool\}$ из нулевой конфигурации (нулевые координаты шарниров) в заданную как последовательность винтовых движений вокруг осей каждого из n шарниров, направления которых заданы в системе координат $\{Base\}$. Похожий принцип описания движения используется в модели «Zero-Reference» [4].

Напротив, в моделях DH, HAY и CPC прямая кинематика представляет собой цепочку относительных перемещений между соседними системами координат, жестко связанными со звеньями.

Как было отмечено ранее, в силу гладкости экспоненциального отображения и принципов теории винтов, модель РОЕ по самой своей постановке обладает и *параметрической непрерывностью*, и *полнотой*.

Однако до анализа, представленного в [20], вопросы *минимальности* и *идентифицируемости* параметров в рамках РОЕ не рассматривались. Отсутствие таких исследований вызывало опасения относительно робастности алгоритмов идентификации при их применении к кинематическим моделям на основе РОЕ.

Первоначально предполагалось, что описание модели РОЕ и ее вычислительная реализация значительно сложнее, чем в модели DH. Однако впоследствии это мнение было опровергнуто в [94], где убедительно показано, что вычисления на основе РОЕ на самом деле менее ресурсоемкие.

Более того, многочисленные примеры (см., например, [13, 14]) показали, что построение РОЕ-модели естественно и интуитивно. Ключевая особенность заключается в том, что данный подход освобождает разработчика от необходимости следовать строгим правилам назначения систем координат — требованиям, обязательным для прочих кинематических соглашений.

В настоящее время, хотя РОЕ и DH остаются наиболее распространенными в робототехническом сообществе [14, 15], альтернативные модели, в частности HAY и CPC, продолжают находить применение [83—85, 95, 96], особенно в задачах калибровки и идентификации параметров.

Поскольку выбор кинематической модели зависит от особенностей приложений и постановок задач, значительный интерес представляют алгоритмы аналитического преобразования параметров между моделями. Для обсуждаемых представлений большинство таких переходов уже известно и систематизировано на рисунке 1.1.

На данном рисунке для обозначения различных установленных путей преобразования параметров используются отдельные стрелки. Оранжевая стрелка обозначает преобразование для перехода от DH к РОЕ модели [13, 14, 97]. Зеленые стрелки соответствуют преобразованиям [8], в которой была предложена общая процедура расчета параметров CPC из матриц однородного преобразования особой структуры. Относительная простота именно этих переходов служит убедительным обоснованием для принятия модели CPC. Недавно был предложен метод преобразования между представлением DH и моделью HAY [16]. Наконец, пурпурная стрелка отмечает важный результат [15, 98], в котором было разработано аналитическое решение для преобразования РОЕ в DH.

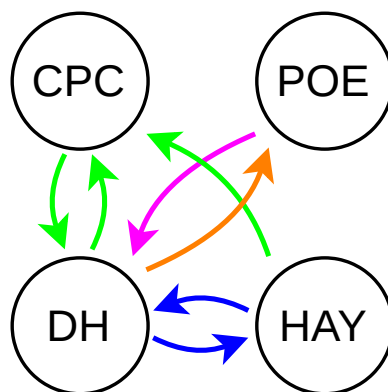


Рисунок 1.1 — Существующие схемы преобразований между моделями DH, HAY, CPC и POE

1.2. Классификация методов калибровки промышленных манипуляторов

В классической работе [1] задача калибровки делится на кинематическую (в том числе калибровка смещения нуля в шарнирах) и динамическую. Суть первой заключается в том, чтобы подобрать такие параметры модели, при которых ошибка позиционирования при перемещении *из точки в точку* становится минимальной [18, 19, 24, 33, 97, 99—102].

Вторая же [103—107] решает иную проблему: найти параметры, достаточно точно описывающие динамику робота *при движении по заданной траектории*. Отдельно стоит упомянуть работы по объединению кинематической и динамической калибровки [27].

Геометрические неточности, дающие ощутимый вклад в ошибку позиционирования, при невысоких скоростях звеньев робота достаточно хорошо компенсируются кинематической калибровкой. Это предположение хорошо подтверждается на практике во многих приложениях — об этом свидетельствует обширный массив работ по кинематической калибровке [9, 18, 24, 102, 108]. В соответствующих работах исследовано и продемонстрировано множество подходов — от калибровки параметров жесткости в шарнирах [21, 109] (влияние редукторов) до модели на основе измерений от двух энкодеров [110] (на стороне привода и на стороне звена) и одновременной калибровки геометрических и жесткостных параметров с использованием нескольких плоскостей [36].

При кинематической калибровке ключевым является способ измерения положения и/или ориентации конца схвата инструмента. На основе этой информации и восстанавливаются геометрические параметры и именно по способу измерения различают [17] калибровку с использованием *внешних измерителей* (open-loop) и на основе контакта с объектом известной геометрии (closed-loop) — *внешних ограничений*.

В первом случае при калибровке используется внешняя измерительная система, фиксирующая составляющие вектора положения и ориентации конца инструмента, а также, возможно, некоторых других точек манипулятора. В частности, координатно-измерительные машины (КИМ) и лазерные трекеры обеспечивают точность измерений порядка 3 мкм. Эффективность подхода продемонстрирована в работах с применением лазерного трекера [18, 101], КИМ [27, 111] и систем технического зрения [22, 23, 25].

К недостаткам относятся высокая стоимость оборудования (КИМ порядка \$100 000), необходимость периодической поверки, жесткие требования к условиям проведения эксперимента, а также необходимость обеспечения непрерывной видимости между измерительной системой и объектом, что ограничивает применимость в загруженной рабочей зоне или при определенных конфигурациях манипулятора.

Напротив, при калибровке с помощью внешних ограничений погрешность позиционирования рассчитывается на основе физических ограничений, накладываемых на конец инструмента: при этом образуется *замкнутая* кинематическая цепь между манипулятором и поверхностью контакта (внешним ограничением). В литературе данный подход реализуется с использованием различных видов ограничений — точечного физического контакта [29, 30], лазерной струны [112], одной или нескольких плоскостей [31—36], а также вспомогательного манипулятора в качестве датчика момента [17] и многих других [37, 39, 113].

Вместе с тем калибровка на основе внешних ограничений обеспечивает несколько меньшую точность при несопоставимо меньших затратах на оборудование и подготовку экспериментальной установки. Так, в одном из наиболее полных исследований калибровки по плоскости с применением чисто геометрической и геометро-жесткостной моделей [36] средняя ошибка позиционирования снижена с 0,6978 мм до 0,2743 мм и 0,1529 мм соответственно. В эксперименте использовался измерительный щуп *Renishaw MP250* (стоимость около \$5000) с повторяемостью 0,25 мкм (пороговая сила 0,08 Н) и эталон — гранитный куб — стоимостью около \$1500 с плоскостностью грани 2 мкм. Ниже рассмотрены некоторые конкретные реализации методов калибровки на основе внешних ограничений инструмента.

В [114] предложен способ динамической калибровки манипулятора с использованием замкнутой кинематической цепи из двух роботов. Соединяющиеся фланцы не имеют общей оси вращения; воздействие на одно звено передается на остальные, после чего кинематические модели оцениваются по данным встроенных датчиков. Недостатком метода является необходимость в точно откалиброванном дополнительном роботе, который, в сущности, является дорогостоящим внешним измерительным средством. Кроме того, стационарный монтаж второго манипулятора в непосредственной близости от калибруемого не всегда предусмотрен или возможен.

В работе [111] описана калибровка манипулятора с помощью встроенного лазерного датчика расстояния. Измерение расстояния от двух точек до объекта позволяет провести кинематическую идентификацию без использования абсолютного положения, что исключает необходимость базовой калибровки. Ограничением подхода является привязка к конкретному лазерному датчику: требуется либо его предварительная калибровка, либо использование только штатного измерителя.

Патент РФ № 2719207 [115] предлагает уточнение геометрических параметров многостепенных манипуляторов путем многократного вывода инструмента в фиксированную точку пространства с различной ориентацией. Положение крайней точки контролируется визуально с помощью остроконечной детали; на основе набора измерений формируется начальная оценка кинематических параметров, которая затем уточняется итерационно по разбросу рассчитанных положений. Недостатки метода очевидны: ручное позиционирование увеличивает длительность калибровки, а визуальный контроль снижает ее точность.

Таблица 1 — Сравнение методов калибровки со внешними ограничениями

Работа	Модель	Огранич.	Инструмент	Задача	Валидация	Сред. ошибка, мм
[116]	ZR	плоск.	блок	нелин.	расст. до плоск.	0,197
[31]	HAY	плоск.	изм. щуп	нелин. МНК	Optotrak 3D	0,5303
[32]	HAY	3 _⊥ плоск.	—	лин.	модель	≈ 0,08
[34]	HAY	куб	изм. щуп	лин.	расст. до плоск.	0,57
[117]	спец.	плоск.	изм. щуп	лин./нелин.	модель	0,0654/0,0536
[35]	HAY	куб	изм. щуп	лин.	расст. до плоск.	улучш. 94%
[36]	mDH	куб	изм. щуп	лин.	расст. до плоск.	0,0204
[38]	mDH	3 сферы	изм. щуп	нелин.	расст. до сфер	0,086
[118]	POE	5 плоск.	—	лин.	модель	до 10 ⁻¹²
[119]	HAY	3 шара	3D изм.	лин.	лаз. трекер	0,208
[37]	HAY	спец.	спец. уст.	лин.	лаз. инт.	≈ 0,11

Тем не менее наиболее распространенными калибровочными поверхностями являются плоскости, реализуемые в виде граней плексигласовых [34], металлических [35] и гранитных [36] кубов, двухшаровые поворотные конструкции [37], а также иные ограничители [31, 32]; сравнительный анализ представлен в таблице 1.

Отметим, что калибровка на основе внешних ограничений особенно перспективна для реализации полностью автоматической процедуры в условиях длительной эксплуатации робота в безлюдном производстве и агрессивных средах. Использование высокоточных измерительных систем требует присутствия оператора и создания специальных условий рабочего пространства, что в указанных приложениях недопустимо. Кроме того, на автоматизированных участках манипуляторы, как правило, входят в состав роботизированных ячеек и выполняют различные этапы технологического процесса. В этом случае встроенное оборудование ячейки может выступать в роли внешних ограничений. Так, типичными элементами сварочных и сборочных роботизированных ячеек являются робот-позиционер и поворотный (поворотного-наклонный) стол, основная рабочая поверхность которого обычно металлическая и имеет плоскостность до 0,05 мм.

В таких условиях параметры калибровочных плоскостей *также* могут отклоняться от номинальных значений и, подобно параметрам манипулятора, требуют уточнения. Заметим, что в работах [31—37] положение и ориентация плоскости предполагались полностью известными (измеренными с высокой точностью).

Таким образом, задача одновременной калибровки в автоматизированном режиме геометрических параметров промышленного манипулятора и вспомогательного оборудования роботизированной ячейки, используемого в качестве внешних ограничений, является актуальной и самостоятельной задачей [11].

1.3. Управление манипуляторами в скользящих режимах: частотные методы анализа и синтеза

Классическое управление в скользящем режиме, предложенное В.И. Уткиным [40], хорошо известно своей робастностью по отношению к *согласованным* возмущениям за счет так называемого принципа инвариантности [41]. В рамках данного подхода первым шагом является выбор многообразия пониженной размерности (поверхности скольжения), которое обладает желаемыми динамическими свойствами, что эквивалентно размещению собственных значений динамики на поверхности. Это можно осуществить, например, путем последовательного преобразования системы в регулярную форму [120] с последующим заданием собственных значений или же, альтернативно, используя формулу Аккерманна и т. д. После чего формируется разрывной (релейный) закон управления — векторный [40], с общим скалярным коэффициентом [40, 121] или же унитарный [122] —, обеспечивающий достижение поверхности скольжения (равенство нулю переменной скольжения) за конечное время и положительную инвариантность данной поверхности даже при наличии лишь ограниченных согласованных возмущений. Изначально для доказательства использовались негладкие функции Ляпунова, требующие анализа устойчивости на пересечениях поверхностей скольжения; позже были получены достаточные условия для систем с доминирующей диагональю.

Несмотря на то, что скользящие режимы первого порядка обеспечивают компенсацию внешних возмущений при довольно слабых предположениях об их ограниченности, непосредственная их реализация предполагает теоретически бесконечную частоту переключений управляющего воздействия, практически недостижимую в силу инерционности исполнительных механизмов и конечного быстродействия измерительных устройств. Кроме того, наличие немоделируемой динамики приводов и сенсоров, а также запаздываний в каналах управления и измерения приводит к возникновению высокочастотных колебаний — *чаттеринга* (*chattering*) — в управляющих и выходных сигналах системы.

Указанное обстоятельство становится критически значимым для высокоточных электромеханических систем, в которых многократные переключения управления способствуют интенсивному износу механических компонентов, нагреву приводов и снижению точности слежения за заданной траекторией. Типичными представителями таких систем являются промышленные манипуляторы, специально предназначенные для выполнения множества повторяющихся операций, причем большинство производителей гарантирует высокую повторяемость движений. Данное свойство находит применение преимущественно при решении бесконтактных задач, где требуется точное следование пространственной траектории, например, при окраске распылением, дуговой сварке, инспекционном контроле и т. п.

При этом точностные характеристики манипулятора определяются не только оценками кинематических параметров, что было отмечено в двух разделах выше, но и качеством управления его приводами. Следует отметить, что подавляющее большинство современных промышленных манипуляторов оснащены встроенными системами управления, осуществляющими регулирование положения и/или скорости приводов на основе показаний энкодеров. Однако

доступ к измерениям моментов (токов двигателей), а тем более к непосредственному управлению ими, как правило, ограничен или вовсе отсутствует. Вследствие этого идентификация полной динамики приводов с редукторами представляет значительные трудности, поскольку собственная динамика привода практически полностью компенсируется внутренним контуром регулирования.

Вместе с тем синтез *внешнего контура*, формирующего уставку для встроенных регуляторов, осложняется параметрическими вариациями звеньев, неопределенностью нагрузки, неучтенной динамикой приводов, внешними возмущениями и запаздываниями. Перечисленные сложности оправдывают необходимость применения робастных алгоритмов управления, способных обеспечить требуемое качество функционирования в условиях неопределенности и внешних возмущений.

В указанных условиях алгоритмы управления в скользящих режимах представляются весьма перспективными и ранее рассматривались в различных постановках [45—47]. Однако в этих работах в качестве управления принимался момент на валах двигателей. В монографии [44] были систематизированы основные подходы к управлению манипуляторами: управление по вектору скорости, последовательная коррекция положения, приближенные методы, управление по вектору силы — однако скользящие режимы первого порядка для компенсации возмущений и неопределенностей строились в предположении измеримости токов в приводах.

Для преодоления указанных недостатков скользящих режимов первого порядка, возникающих, в частности, в задаче управления приводом манипулятора, были сформированы два принципиальных направления. Первое заключается в замене функции sign ее непрерывной аппроксимацией, например, функцией насыщения sat или сигмоидой (см., например, [123]), при которой переменная скольжения сходится к нулю асимптотически. При этом непрерывность управляющего сигнала достигается ценой более слабой сходимости (асимптотической вместо сходимости за конечное время). Второе направление — в синтезе скользящих режимов высшего порядка r (*high-order sliding modes*, HOSM), гарантирующих в скользящем режиме равенство нулю не только самой переменной скольжения, но и ее $r - 1$ производных [124, 125]. При этом сохраняется сходимость за конечное время, однако требуются более жесткие предположения на характер возмущений: для HOSM порядка r — липшицевость его $(r - 1)$ -й производной.

В свою очередь, конкретный выбор в пользу алгоритма «Супер-Скручивания» (*Super-Twisting Algorithm*, STA) [42] обусловлен прежде всего следующими факторами: 1) **Непрерывность**. Большинство интерфейсов манипуляторов требуют непрерывных сигналов управления положением и скоростью; 2) **Свойство скользящего режима второго порядка**. В рассматриваемом сценарии доступны лишь измерения положения, что затрудняет оценку скорости, необходимую для обратной связи в регуляторах на основе HOSM высших порядков. В свою очередь STA обеспечивает сходимость за конечное время как по положению, так и по скорости (без ее оценки) [64].

В частности, благодаря этим свойствам STA нашел широкое применение в практических задачах, таких как управление силой в пантографе [48], преобразователи DC–DC [49], гидравлические приводы [50], электрогидравлический кран [51], тепловые процессы [52] и многие другие.

Следует отметить, что нельзя полностью избавиться от явления чаттеринга даже в случае непрерывных скользящих режимов при наличии немоделируемой динамики — это было строго доказано в [53]. Концепция *свободного от чаттеринга* скользящего режима является заблуждением. В частности, в случае STA наличие дробной степени в пропорциональном члене приводит к бесконечному коэффициенту усиления в нуле.

Однако эффект чаттеринга, вызванный неидеальностями системы, может быть ослаблен путем надлежащей настройки коэффициентов усиления. В работе [54] коэффициенты робастного точного дифференциатора (robust exact differentiator), являющегося по существу реализацией STA, подбирались с помощью моделирования в предположении наличия немоделируемой динамики. Для этой же цели впоследствии начали применяться частотные методы: асимптотические методы описывающей функции (Describing Function, DF) и гармонического баланса (Harmonic Balance, HB) [55—57], а также годограф возмущенной релейной системы (Locus of a Perturbed Relay System, LPRS) [58—60].

В частности, частотные методы применялись для анализа и синтеза регулятора на основе скользящего режима второго порядка [61], непрерывного по Липшицу регулятора на скользящем режиме (Lipschitz Continuous Sliding Mode Controller, LCSMC) [62] и STA [63—65, 67]. Коэффициенты STA настраивались для достижения заданных запасов по амплитуде [66], комбинированных запасов по амплитуде и усилению [64] или заданных амплитуды и частоты чаттеринга [63]. В работе [126] на примере алгоритма «Скручивания» (Twisting Algorithm) для разной динамики исполнительного механизма сравнивались результаты оценок параметров чаттеринга (частота и амплитуда), полученных с помощью метода DF и LPRS. Указанные методы были также апробированы для анализа параметров чаттеринга в манипуляторе при использовании скользящих режимов первого порядка и терминального управления [45]. В [67] для объекта управления в виде чистого интегратора коэффициенты STA корректировались с целью минимизации чаттеринга при различных неидеальностях, таких как звено чистого запаздывания или критически демпфированное звено второго порядка. В работе [68] показано, что для определенных постоянных времени исполнительных механизмов уровень чаттеринга, вызванный разрывным управлением, *может быть даже ниже*, чем уровень, вызванный непрерывным SMC.

Тем не менее фундаментальное ограничение существующих результатов состоит в том, что во всех указанных работах динамика системы предполагалась соответствующей чистому интегратору, что делает полученные результаты непосредственно применимыми лишь к синтезу дифференциаторов [67]. Данное допущение не позволяет использовать их для управления динамическими объектами с нетривиальной передаточной функцией, к которым относятся промышленные манипуляторы. Таким образом, разработка методики синтеза алгоритма «Супер-Скручивания» с использованием частотных методов для объектов управления более общего вида, чем было представлено ранее, для задачи управления манипулятором при ограниченном доступе к измерениям, представляет собой актуальную нерешенную проблему, которая будет рассмотрена далее.

ГЛАВА 2. Кинематические модели и методы их параметрического пересчета

В настоящей главе на базе распространенных параметризаций кинематических цепей — DH, HAY, CPC и POE — развивается методика аналитического пересчета параметров для манипуляторов с последовательным расположением звеньев. Представленные теоретические результаты, включающие алгоритмы взаимного преобразования и доказательства их корректности, составляют основу методов калибровки, излагаемых в последующих главах. Ниже приводится постановка задачи.

2.1. Постановка задачи

Настоящее исследование расширяет существующие схемы преобразований, предлагая аналитический подход для переходов, выделенных красным цветом (рисунок 2.1), а именно: POE→CPC, POE→HAY, CPC→POE, HAY→POE и CPC→HAY.

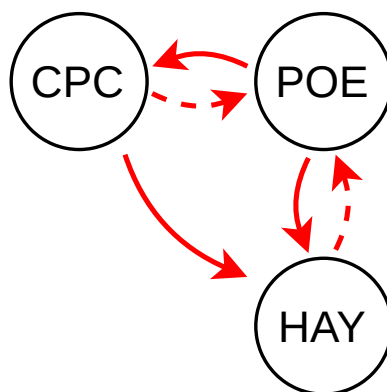


Рисунок 2.1 — Предлагаемые схемы преобразований между моделями HAY, CPC и POE

Такая постановка задачи мотивирована тремя соображениями: 1) дополнить существующие схемы преобразований [2, 8, 13—16, 97, 98], представленные на рисунке 1.1, недостающими переходами; 2) обеспечить совместимость и сравнимость методов, разработанных в рамках различных кинематических моделей — в частности, в задачах калибровки и идентификации параметров (см., например, [8, 19, 20, 85, 97]); 3) предоставить пользователю свободу выбора наиболее подходящей кинематической модели для конкретной задачи, независимо от того, в каком представлении система описана изначально, и возможность возвращаться к исходной модели с помощью предложенных процедур.

2.2. Основные кинематические модели

Преобразование прямой кинематики $\mathbf{F}(\mathbf{q}, \Phi) : \mathbb{S}^n \times \mathbb{R}^m \mapsto \mathbb{SE}(3)$ для открытых последовательных кинематических цепей, содержащих n звеньев и n шарниров, в общем случае имеет вид

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}, \Phi) = \mathbf{T}_0^1(q_1, \Phi_1) \mathbf{T}_1^2(q_2, \Phi_2) \dots \mathbf{T}_{n-1}^n(q_n, \Phi_n), \quad (2.1)$$

где Φ и $\mathbf{q}$ — векторы кинематических параметров и координат шарниров соответственно; $\mathbf{T}_i^j \in \mathbb{SE}(3)$ обозначает матрицу однородного преобразования, описывающую переход из системы координат $\{j\}$ в систему координат $\{i\}$; Φ_i и q_i — компоненты векторов Φ и $\mathbf{q}$, соответствующие системе координат $\{i\}$.

Далее приводятся краткие сведения о способах параметризации матриц $\mathbf{T}_i^{i+1}$, входящих в преобразование прямой кинематики (2.1), для моделей ДН, НАУ, СРС и РОЕ, которые получили наибольшее распространение в задачах калибровки и идентификации.

2.2.1. Представление Денавита–Хартенберга

Одним из первых формальных методов описания кинематики открытых последовательных цепей является представление, предложенное в работе [75]. Представление ДН (Denavit–Hartenberg) широко используется в робототехнике, поскольку обеспечивает минимальное четырехпараметрическое описание преобразования между системами координат, связанными со звеньями, а также задает строгие правила их назначения (см. [127]).

В рамках данного представления преобразование прямой кинематики определяется как произведение матриц однородного преобразования $\mathbf{T}_{i-1}^i$, $i = \overline{1, n}$, между последовательными системами координат $\{i-1\}$ и $\{i\}$, связанными со звеньями кинематической цепи. В частности, матрица преобразования может быть записана в следующем виде:

$$\mathbf{T}_{i-1}^i = \mathbf{Rot}_z(q_i + \theta_i) \mathbf{Tran}_z(d_i) \mathbf{Rot}_x(\alpha_i) \mathbf{Tran}_x(a_i), \quad (2.2)$$

где θ_i , d_i , α_i и a_i — ДН-параметры, относящиеся к системе координат $\{i\}$ (см. рис. 2.2), а q_i — координата шарнира.

Здесь и далее обозначение $\mathbf{Rot}_k(\gamma) \in \mathbb{SE}(3)$ соответствует вращению вокруг вектора $\mathbf{k}$ на угол γ , а $\mathbf{Tran}_l(v) \in \mathbb{SE}(3)$ — поступательному перемещению вдоль вектора $\mathbf{l}$ на расстояние v .

Известно, что ДН представление имеет существенный недостаток для задач калибровки, а именно: оно является сингулярным для последовательно расположенных шарниров, чьи оси номинально параллельны. Можно легко продемонстрировать (Рис. 2.3 и Таблица 2), что при малом наклоне оси шарнира ε , например, вокруг оси $\mathbf{y}$, параметры ДН изменяются скачкообразно (выделены красным).

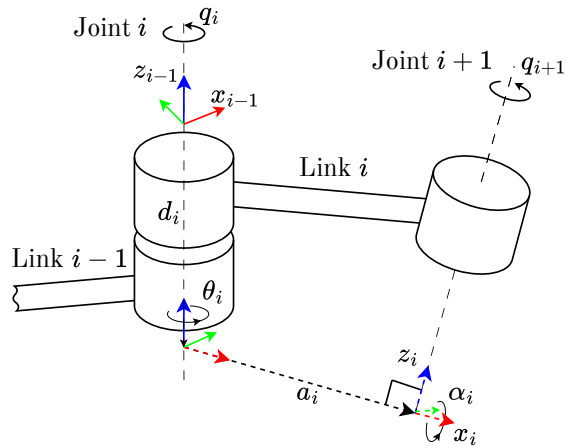


Рисунок 2.2 — Системы координат ДН для вращательного шарнира

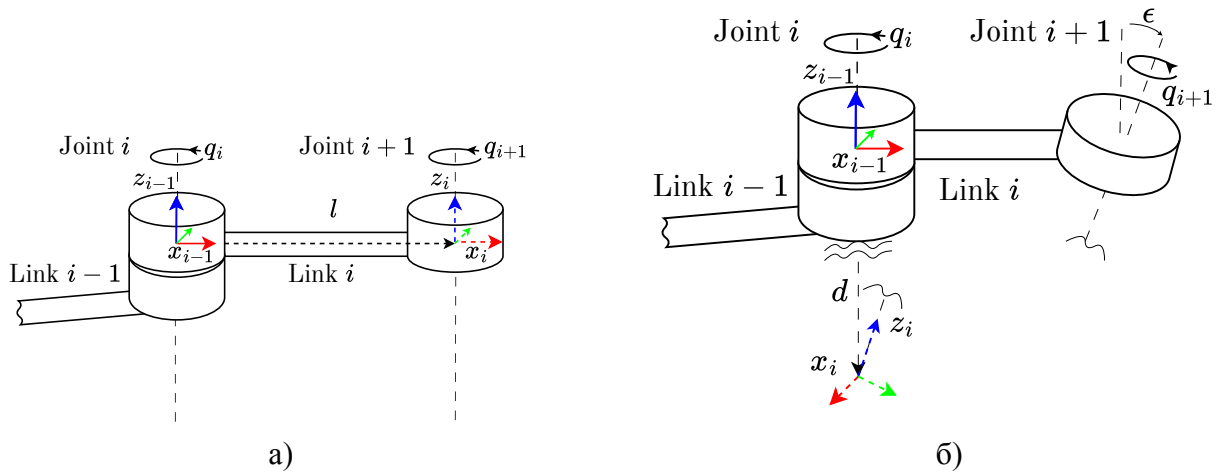
Рисунок 2.3 — Пример параметрической сингулярности в ДН представлении: а) номинальное положение; б) наклон на ϵ по оси y

Таблица 2 — Номинальные и фактические ДН параметры в сингулярном случае

	θ , рад	d , мм	α , рад	a , мм
номинальные	q_i	0	0	l
фактические	$q_i - \pi/2$	$-d$	$-\epsilon$	0

В этом случае следует либо использовать альтернативные модели кинематики, либо применять ДН представление при калибровке манипуляторов, у которых отсутствуют соседние шарниры с параллельными осями, например, KUKA LWR4+ [27].

2.2.2. Модель Хаяти

Как упоминалось выше, модель, предложенная в [2, 128], была в первую очередь обусловлена численными недостатками ДН [3] при решении практических задач, например, «Калибровка смещения остронаправленной антенны космического аппарата Галилео» [129]. В частности, Хаяти вводит дополнительное вращение $\text{Rot}_y(\beta)$ матрицы T_{i-1}^i в случае почти параллельных последовательных шарниров, как для вращательных

$$T_{i-1}^i = \text{Rot}_z(q_i + \theta_i) \text{Tran}_x(a_i) \text{Rot}_x(\alpha_i) \text{Rot}_y(\beta_i), \quad (2.3)$$

так и для поступательных

$$T_{i-1}^i = \text{Tran}_z(q_i + d_i) \text{Rot}_x(\alpha_i) \text{Rot}_y(\beta_i), \quad (2.4)$$

что для наглядности также показано на рисунке 2.4.

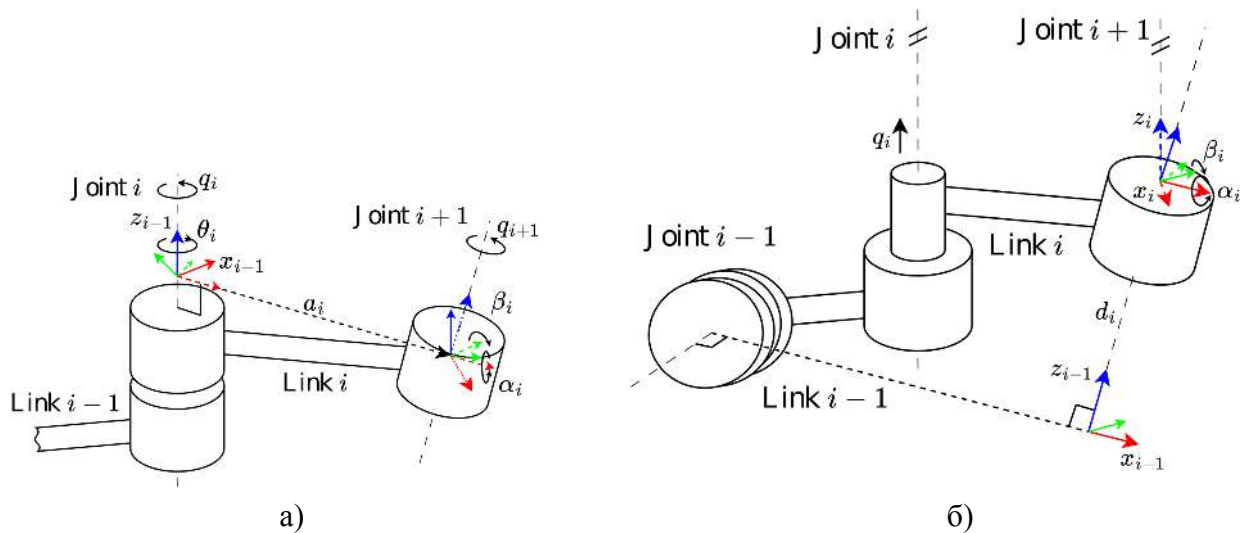


Рисунок 2.4 — Пример применения НАУ модели для последовательных параллельных шарниров:
а) вращательного; б) поступательного

В этом случае обсуждаемая сингулярность ДН исчезает, что было строго показано в [128]. По существу, модель НАУ можно рассматривать как *естественное расширение* ДН представления, поскольку (2.3) и (2.4) применяются для преобразований с параллельными/почти параллельными шарнирами, а ДН параметры применяются для остальных.

Однако системы координат $\{Base\}$ и $\{Tool\}$ не могут быть произвольно назначены ни в ДН представлении, ни в модели НАУ.

2.2.3. Полная и параметрически непрерывная модель

Полная и параметрически непрерывная модель (Complete and Parametrically Continuous, CPC), предложенная в работах [8, 86], одновременно обеспечивает свойства *параметрической непрерывности* и *полноты*, сохраняя при этом столь же формализованную процедуру назначения систем координат, как и представление Денавита–Хартенберга. В рамках данной модели матрица однородного преобразования $\mathbf{T}$ из системы координат $\{i\}$ в систему координат $\{i - 1\}$ представляется в виде произведения двух матриц в соответствии с подходом, предложенным в [130] (индексы для краткости опущены):

$$\mathbf{T} = \mathbf{Q} \mathbf{V}, \quad (2.5)$$

где $\mathbf{Q}$ представляет собой *матрицу движения* (*motion matrix*), описывающую движение в шарнире. В частности, для вращательного шарнира $\mathbf{Q} = \mathbf{Rot}_z(q)$, а для поступательного — $\mathbf{Tran}_z(q)$.

В свою очередь, *матрица формы* (*shape matrix*) $\mathbf{V}$ описывает геометрию звена и основана на теоретически минимальном представлении прямой, предложенном в [87]. Прямая задается единичным вектором $\mathbf{b}$ ($\|\mathbf{b}\| = 1$), ограниченным верхним полупространством базовой системы координат, а также проекцией точки, принадлежащей прямой, на плоскость, проходящую через начало координат и ортогональную вектору $\mathbf{b}$. Эта проекция описывается параметрами l_x и l_y (см. [8], разд. II). В этом случае [87] матрица формы имеет вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{Rot}_k(\alpha) \mathbf{Tran}_x(l_x) \mathbf{Tran}_y(l_y), \quad (2.6)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{k} &= \frac{\mathbf{z} \times \mathbf{b}}{\|\mathbf{z} \times \mathbf{b}\|} = \begin{bmatrix} -\frac{b_y}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} & \frac{b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} & 0 \end{bmatrix}^\top, \\ \alpha &= \arccos(\mathbf{z}^\top \mathbf{b}) = \arccos(b_z), \\ \mathbf{b} &= \begin{bmatrix} b_x & b_y & \sqrt{1 - b_x^2 - b_y^2} \end{bmatrix}^\top. \end{aligned}$$

В работе [8] предложено дополнить выражение (2.6) двумя дополнительными параметрами: углом β , определяющим выбор направления оси x , и параметром l_z , обеспечивающими возможность произвольного назначения систем координат, то есть выполнение свойства *полноты*. В результате матрица формы $\mathbf{V}$ принимает вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathbf{b}) \mathbf{Rot}_z(\beta) \mathbf{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l}), \quad (2.7)$$

где $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}^\top$, а $\mathbf{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l})$ обозначает последовательное перемещение вдоль осей x , y и z на расстояния l_x , l_y и l_z соответственно. Матрица $\mathbf{R}(\mathbf{b})$ представляет собой выражение $\mathbf{Rot}_k(\alpha)$, явно записанное через параметры вектора $\mathbf{b}$ с учетом соглашений модели CPC:

$$\mathbf{R}(\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} 1 - \frac{b_x^2}{1 + b_z} & -\frac{b_x b_y}{1 + b_z} & b_x & 0 \\ -\frac{b_x b_y}{1 + b_z} & 1 - \frac{b_y^2}{1 + b_z} & b_y & 0 \\ -b_x & -b_y & b_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

Геометрическая интерпретация последовательности преобразований (2.7) приведена на рисунке 2.5.

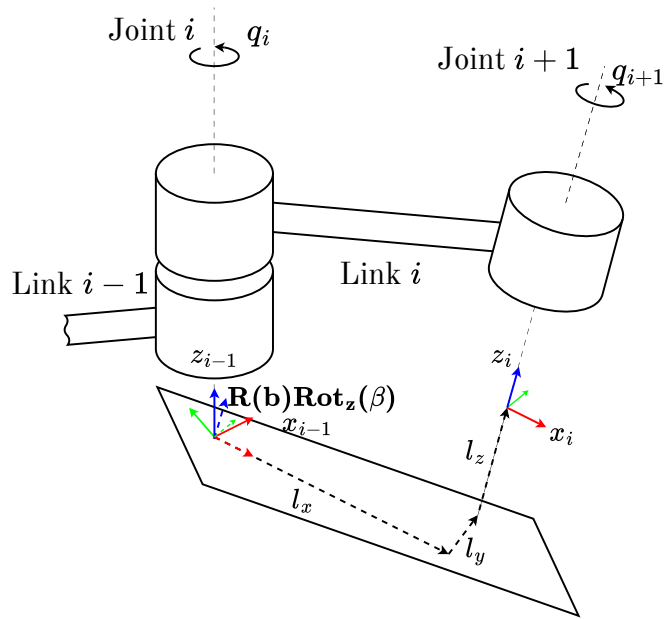


Рисунок 2.5 — Геометрическая интерпретация матрицы формы V (2.7) CPC модели на примере вращательного шарнира

Следует отметить, что исходная семипараметрическая модель может быть упрощена за счет введения дополнительных правил назначения систем координат (см. [8]). В частности, в этой работе показано, что параметры l_z и β в выражении (2.7) являются избыточными для всех систем координат, за исключением $\{Base\}$ и $\{Tool\}$, вследствие чего для остальных систем можно принять $l_z = 0$ и $\beta = 0$.

2.2.4. Модель на основе произведения матричных экспонент

В работе [7] было предложено моделировать открытые кинематические цепи с помощью произведения матричных экспонент (Product of Exponentials, POE). Впервые данные результаты были апробированы в задачах кинематической калибровки в [97], где были отмечены следующие преимущества: 1) отсутствие необходимости назначать системы координат каждому звену — требуется лишь задать систему координат $\{Tool\}$ в нулевой конфигурации манипулятора ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$), аналогично модели [4]; 2) возможность получить решение линеаризованных уравнений прямой кинематики в замкнутой форме, основанное на теории винтов; 3) свойство *параметрической непрерывности* выполняется естественным образом благодаря гладкости экспоненциального отображения; 4) предлагается обобщенное кинематическое описание, которое может быть полезно в различных приложениях, а не только в задачах кинематической калибровки.

Таким образом, необходимо определить матрицу $\mathbf{T}_{Tool} \in \mathbb{SE}(3)$, представляющую собой матрицу однородного преобразования от системы координат $\{Tool\}$ к $\{Base\}$ при нулевой конфигурации ($\mathbf{q} = \mathbf{0}$). Далее, пусть каждому шарниру соответствует *винт* $\xi \in \mathbb{R}^6$ в терминах теории винтов [7, 14]. А именно, для *вращательного* и *винтового* (с шагом винта h) шарниров он принимает следующий вид:

$$\xi = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega} \\ \mathbf{p} \times \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \quad (2.9)$$

где $\boldsymbol{\omega}$ — единичный вектор оси шарнира ($\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$), $\mathbf{p}$ — точка, лежащая на оси шарнира, причем $\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{v} = 0$ для вращательного шарнира и $\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{v} = h$ для винтового (как показано на рис. 2.6).

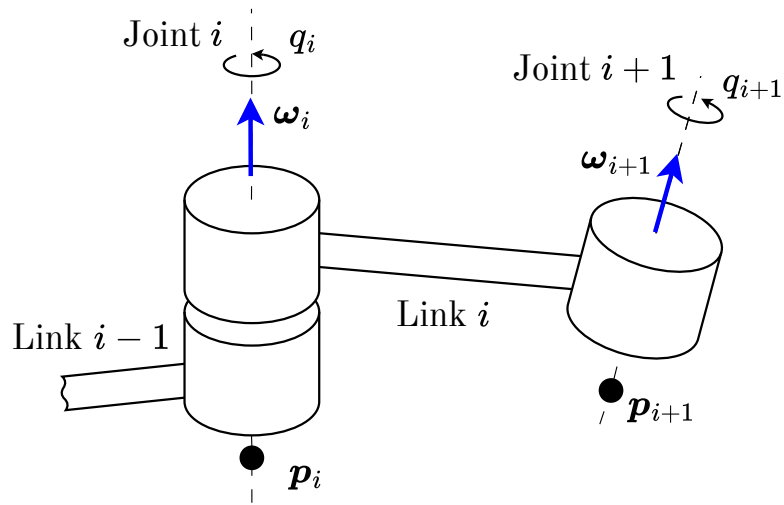


Рисунок 2.6 — Геометрическая интерпретация параметров РОЕ модели (2.9) на примере вращательного шарнира

Для *поступательного* шарнира кинематический винт ξ определяется как

$$\xi = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (2.10)$$

где $\mathbf{v}$ — единичный вектор оси шарнира ($\|\mathbf{v}\| = 1$).

В литературе [13] известно, что кинематический винт ξ может быть записан в матричной форме, соответствующей структуре алгебры Ли $se(3)$, с помощью оператора $\hat{\cdot}$, обозначающего отображение из векторного пространства в соответствующую структуру алгебры Ли, т.е., $\hat{\cdot} : \mathbb{R}^3 \mapsto so(3)$ или $\mathbb{R}^6 \mapsto se(3)$, в зависимости от контекста:

$$\hat{\xi} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\omega}} & \mathbf{v} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Тогда для получения преобразований прямой кинематики (2.1) необходимо вспомнить [7], что элемент алгебры Ли ξ (кинематический винт) и переменная шарнира $q \in \mathbb{S}$

образуют соответствующую однопараметрическую подгруппу Ли $\mathbf{T} \in \mathbb{SE}(3)$ посредством экспоненциального отображения:

$$\mathbf{T} = \exp(q\hat{\xi}). \quad (2.12)$$

Для примера рассмотрим шарнир с осью $\mathbf{z}$, который вращается на угол q , с преобразованием $\mathbf{T} = \mathbf{Rot}_z(q) = \exp(q\hat{\xi}_{rev})$, где винт ξ имеет вид:

$$\xi_{rev} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^\top. \quad (2.13)$$

Аналогично, для *призматического* шарнира с преобразованием $\mathbf{T} = \mathbf{Tran}_z(q) = \exp(q\hat{\xi}_{psm})$, где

$$\xi_{psm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top, \quad (2.14)$$

что отражает чистое перемещение вдоль оси $\mathbf{z}$. Наконец, *винтовому* шарниру, комбинирующему вращение и перемещение, соответствует преобразование $\mathbf{T} = \mathbf{Rot}_z(q) \cdot \mathbf{Tran}_z(qh) = \exp(q\hat{\xi}_{hel})$ при

$$\xi_{hel} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}^\top, \quad (2.15)$$

с шагом винта h . Таким образом, выбирая соответствующие винты шарниров (2.9), (2.10) и задавая $\mathbf{T}_{Tool}$ как позу системы координат $\{Tool\}$ при $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ (нулевая конфигурация), где q_i — переменные шарниров ($i = \overline{1, n}$), преобразование прямой кинематики для последовательного механизма с n звеньями можно выразить, используя (2.12), как

$$\mathbf{T}_0^n = \exp(q_1\hat{\xi}_1) \exp(q_2\hat{\xi}_2) \cdot \dots \cdot \exp(q_n\hat{\xi}_n) \mathbf{T}_{Tool}. \quad (2.16)$$

Другое важное свойство из теории групп Ли [131] заключается в том, что для любых заданных $\hat{\xi}_1, \hat{\xi}_2 \in se(3)$ существует $\mathbf{T} \in \mathbb{SE}(3)$ такая что

$$\hat{\xi}_1 = \mathbf{T} \hat{\xi}_2 \mathbf{T}^{-1}. \quad (2.17)$$

Кроме того, (2.17) можно записать [15] с использованием *присоединенного отображения* $Ad(\mathbf{T}) : se(3) \mapsto se(3)$, в линейной форме

$$\xi_1 = Ad(\mathbf{T}) \xi_2, \quad (2.18)$$

где матрица присоединенного оператора $Ad(\mathbf{T})$ имеет вид

$$Ad(\mathbf{T}) = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{T}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hat{\mathbf{t}} \tilde{\mathbf{T}} & \tilde{\mathbf{T}} \end{bmatrix}, \quad (2.19)$$

а $\tilde{\mathbf{T}}$ и $\mathbf{t}$ являются $\mathbb{SO}(3)$ и $\mathbb{R}^3$ компонентами матрицы $\mathbf{T}$ соответственно.

2.3. Аналитические алгоритмы пересчета моделей

В данном разделе излагается один из основных результатов диссертации аналитические алгоритмы, реализующие схемы пересчета, указанные ранее на Рис. 1.1: POE–CPC, POE–HAY, CPC–HAY, CPC–POE и HAY–POE.

2.3.1. Пересчет модели на основе произведения матричных экспонент в полную и параметрически непрерывную модель

Аналитический алгоритм пересчета параметров между моделями РОЕ и СРС — сформулирован в Теореме 2.1 [70]. Вывод алгоритма опирается на вспомогательные технические Леммы 2.1–2.3, в которых доказывается пересчет для вращательных, поступательных и винтовых шарниров соответственно, а также на Утверждение 2.1 (для произвольного константного преобразования). Все они приведены ниже.

Лемма 2.1. Пусть для вращательного шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\xi})$. Тогда соответствующие параметры СРС модели могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{V} \text{Rot}_z(q) \mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{V} = \mathbf{R}(b) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(l)$.

Доказательство. Для произвольного кинематического винта ξ в случае вращательного шарнира существует такая матрица $\mathbf{V} \in \text{SE}(3)$, что

$$\exp(q\hat{\xi}) = \mathbf{V} \exp(q\hat{\xi}_{rev}) \mathbf{V}^{-1} = \exp(q\mathbf{V} \hat{\xi}_{rev} \mathbf{V}^{-1}), \quad (2.20)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{R}(b) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(l)$ определена согласно (2.7), $\xi_{rev} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0]^\top$ (см. (2.13)). Уравнение (2.20) эквивалентно $\hat{\xi} = \mathbf{V} \hat{\xi}_{rev} \mathbf{V}^{-1}$ и, следовательно, может быть записано с помощью присоединенного оператора (2.18), (2.19):

$$\xi = \text{Ad}(\mathbf{V})\xi_{rev} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{V}} & \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \hat{t}\tilde{\mathbf{V}} & \tilde{\mathbf{V}} \end{bmatrix} \xi_{rev}, \quad (2.21)$$

где $\tilde{\mathbf{V}} \in \text{SO}(3)$ и $t \in \mathbb{R}^3$ являются компонентами $\mathbf{V}$. Соотношения на параметры РОЕ и СРС моделей можно получить, подставив $\mathbf{V}$ в явной форме (2.7) (согласно соглашению СРС) в (2.21), обозначая $\cos(\beta)$, $\sin(\beta)$ как c_β , s_β , соответственно:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 s_\beta + k_2 c_\beta & -k_2 s_\beta + k_1 c_\beta \\ -k_2 s_\beta - k_3 c_\beta & k_3 s_\beta - k_2 c_\beta \\ -k_4 s_\beta + k_5 c_\beta & -k_5 s_\beta - k_4 c_\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

где $k_1 = \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_z}{b_z + 1}$, $k_2 = \frac{b_x b_y}{b_z + 1}$, $k_3 = \frac{b_x^2 + b_z^2 + b_z}{b_z + 1}$, $k_4 = b_x$, $k_5 = b_y$.

Примечательно, что компонента l_z вектора l является избыточным параметром, что устанавливается прямыми вычислениями, независимо от допущений СРС-модели [8].

Более того, (2.22) можно упростить, принимая во внимание избыточность параметра β ($\beta = 0$ для всех систем координат, кроме $\{Base\}$ и $\{Tool\}$, как отмечалось ранее):

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{b_x b_y}{b_z + 1} & \frac{b_y^2 + b_z^2 + b_z}{b_z + 1} \\ -\frac{b_x^2 + b_z^2 + b_z}{b_z + 1} & -\frac{b_x b_y}{b_z + 1} \\ b_y & -b_x \end{bmatrix}}_{\triangleq \mathbf{D}} \underbrace{\begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}}_{\triangleq l}. \quad (2.23)$$

Обозначим строки матрицы $\mathbf{D}$ как $\mathbf{d}_i$, $i = \overline{1,3}$. Предположим сначала, без потери общности, что $|\omega_3| = \max(|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|)$, откуда следует $\omega_3 \neq 0$, поскольку $\|\boldsymbol{\omega}\| = 1$. Далее сформируем матрицу $\mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ из строк $\mathbf{d}_1$ и $\mathbf{d}_2$. Нетрудно проверить, что $\mathbf{K}$ является невырожденной, так как $\det(\mathbf{K}) = b_z$ с учетом указанного выше предположения и основных свойств СРС модели: $\|\mathbf{b}\| = 1$ и $b_z \neq -1$ (см. пояснения к (2.7)). Следовательно, параметры l_x и l_y могут быть однозначно найдены как $\mathbf{l} = \mathbf{K}^{-1} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$. Остается показать, что $v_3 = \mathbf{d}_3^\top \mathbf{l}$ также удовлетворяет (2.23), что можно сделать непосредственно, используя свойство РОЕ для вращательных шарниров $\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{v} = 0$ (см. (2.9)), а именно $v_3 = -(\omega_1 v_1 + \omega_2 v_2) / \omega_3$.

Случаи, когда $|\omega_1|$ или $|\omega_2|$ являются $\max(|\omega_1|, |\omega_2|, |\omega_3|)$, доказываются аналогичным образом, с формированием невырожденной $\mathbf{K}$ из строк $\mathbf{d}_2$, $\mathbf{d}_3$ и $\mathbf{d}_1$, $\mathbf{d}_3$ соответственно, что всегда возможно, поскольку $\det(\mathbf{K})$ равен b_x и $-b_y$ соответственно. Аналогично, с использованием $\boldsymbol{\omega}^\top \mathbf{v} = 0$ показывается, что $v_1 = \mathbf{d}_1^\top \mathbf{l}$ и $v_2 = \mathbf{d}_2^\top \mathbf{l}$ также являются решением (2.23).

Таким образом, решение (2.23) существует, и преобразование параметров РОЕ в СРС для вращательного шарнира может быть выполнено. $\square$

Лемма 2.2. Пусть для поступательного шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\boldsymbol{\xi}})$. Тогда соответствующие параметры СРС модели могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{V} \text{Tran}_z(q) \mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathbf{b}) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l})$.

Доказательство. Для кинематического винта $\boldsymbol{\xi}$ в случае поступательного шарнира существует такая матрица $\mathbf{V} \in \text{SE}(3)$, что

$$\exp(q\hat{\boldsymbol{\xi}}) = \mathbf{V} \exp(q\hat{\boldsymbol{\xi}}_{psm}) \mathbf{V}^{-1} = \exp(q\mathbf{V} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{psm} \mathbf{V}^{-1}), \quad (2.24)$$

где $\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathbf{b}) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l})$ согласно (2.7), а $\boldsymbol{\xi}_{psm} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$ согласно (2.14). Аналогично доказательству Леммы 2.1, соотношение (2.24), упрощенное до $\hat{\boldsymbol{\xi}} = \mathbf{V} \hat{\boldsymbol{\xi}}_{psm} \mathbf{V}^{-1}$, может быть переписано с помощью присоединенного оператора (2.19):

$$\boldsymbol{\xi} = \text{Ad}(\mathbf{V}) \boldsymbol{\xi}_{psm}. \quad (2.25)$$

Тогда явная подстановка $\mathbf{V}$ из (2.7) в (2.25) дает

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}. \quad (2.26)$$

Поскольку для поступательного шарнира в форме РОЕ выполняются условия $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ и $\|\mathbf{v}\| = 1$, вектор $\mathbf{b}$ находится однозначно, а остальные параметры можно считать избыточными: $\beta = 0$ и $\mathbf{l} = \mathbf{0}$. $\square$

Лемма 2.3. Пусть для винтового шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\boldsymbol{\xi}})$. Тогда соответствующие параметры СРС модели могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{V} \text{Rot}_z(q) \text{Tran}_z(hq) \mathbf{V}^{-1}$, где $\mathbf{V} = \mathbf{R}(\mathbf{b}) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l})$.

Доказательство. Для произвольного кинематического винта ξ в случае *винтового шарнира* существует матрица V такая, что:

$$\exp(q\hat{\xi}) = V \exp(q\hat{\xi}_{hel}) V^{-1} = V \text{Rot}_z(q) \text{Tran}_z(hq) V^{-1}, \quad (2.27)$$

где $V = R(b) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(l)$ из (2.7), $\xi_{hel} = [0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ h]^\top$ согласно (2.15) и $h = \omega^\top v$. Преобразование (2.27) также может быть переписано в линейной форме (2.18) с использованием присоединенного отображения (2.19), как и ранее. Тогда, подставляя V в явной форме (2.7) с избыточным параметром $\beta = 0$, как для (2.23), получаем:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b_x b_y}{b_z+1} & \frac{b_y^2+b_z^2+b_z}{b_z+1} & b_x \\ -\frac{b_x^2+b_z^2+b_z}{b_z+1} & -\frac{b_x b_y}{b_z+1} & b_y \\ b_y & -b_x & b_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \\ h \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

Нетрудно убедиться, что с учетом $b = \omega$ замена координат $u = v - h\omega$ преобразует (2.28) к виду

$$\omega = b, \quad u = \begin{bmatrix} \frac{b_x b_y}{b_z+1} & \frac{b_y^2+b_z^2+b_z}{b_z+1} \\ -\frac{b_x^2+b_z^2+b_z}{b_z+1} & -\frac{b_x b_y}{b_z+1} \\ b_y & -b_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_x \\ l_y \end{bmatrix}, \quad (2.29)$$

где $\omega^\top u = 0$. Применяя методологию, представленную в Лемме 2.1 (см. (2.23)), к преобразованной системе (2.29), устанавливается существование решения (2.28). Таким образом, может быть выполнено преобразование параметров РОЕ в СРС для *винтового шарнира*. $\square$

Обобщенная версия Утверждения 2.1, которая была первоначально сформулирована и доказана в [8] (Разд. V), приводится ниже для сохранения целостности изложения.

Замечание 2.1. Следует отметить, что алгоритм в [8] не может быть применен в случае когда матричная экспонента зависит от координаты шарнира q , как в $T = \exp(q\hat{\xi})$. Однако если преобразование является константным, т.е., $T = \exp(\hat{\xi})$, алгоритм [8] может быть использован.

Утверждение 2.1. Пусть для произвольной константной матрицы однородного преобразования T в форме РОЕ имеет вид $T = \exp(\hat{\xi})$. Тогда соответствующие параметры СРС модели могут быть однозначно получены из $V = R(b) \text{Rot}_z(\beta) \text{Tran}_{[x,y,z]}(l)$.

Доказательство. Рассмотрим сначала компоненты $\tilde{R}, \tilde{T} \in \mathbb{SO}(3)$ матриц $R(b)$, приведенной в (2.8) и $T = \exp(\hat{\xi}) = \begin{bmatrix} \tilde{T} & t \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, полученной путем экспоненциального отображения произвольного кинематического винта ξ , соответственно. Следуя СРС модели (2.7), можно записать следующее соотношение для вращательных компонент:

$$\tilde{T} = \tilde{R}(b) \widetilde{\text{Rot}}_z(\beta), \quad (2.30)$$

где $\widetilde{\text{Rot}}_z(\beta) \in \mathbb{SO}(3)$. Поскольку следующим преобразованием после $R(b)$ является $\widetilde{\text{Rot}}_z(\beta)$, вектор b однозначно определяется как третий столбец $\tilde{T}$: $b = [\tilde{t}_{31} \ \tilde{t}_{32} \ \tilde{t}_{33}]^\top$, исходя из свойств СРС-модели (см. [8], раздел V). Соответственно, β находится из

$$\widetilde{\text{Rot}}_z(\beta) = \tilde{R}^\top(b) \tilde{T}. \quad (2.31)$$

Наконец, $\mathbf{l} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \end{bmatrix}^\top$ может быть вычислен следующим образом:

$$\mathbf{l} = \left(\widetilde{\mathbf{R}}(\mathbf{b}) \widetilde{\mathbf{Rot}}_z(\beta) \right)^\top \mathbf{t}, \quad (2.32)$$

где $\mathbf{t}$ — вектор перемещения $\mathbb{R}^3$ матрицы $\mathbf{T}$. □

Таким образом, мы готовы сформулировать алгоритм и соответствующую теорему для преобразования РОЕ–СРС, которые по структуре аналогичны случаю преобразования РОЕ–ДН [15].

Алгоритм 2.1 Алгоритм по пересчету РОЕ-СРС параметров

Require: РОЕ параметры ξ_i , ξ_{Tool} при $i = \overline{1, n}$, которые определяют прямую кинематику

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \exp(q_1 \hat{\xi}_1) \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}).$$

- 1: **for** $i = \overline{1, n}$ при $\mathbf{V}_{-1} = \mathbb{I}$ **do**
 - 2: Перезапишем $(\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})^{-1} \exp(q_i \hat{\xi}_i)$ как $\exp\left(q_i (\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})^{-1} \hat{\xi}_i (\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})\right) \cdot (\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})^{-1}$;
 - 3: Обозначим $\xi'_i = Ad\left((\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})^{-1}\right) \xi_i$ используя (2.17), (2.18) где $\xi'_i = [\omega_i'^\top \mathbf{v}_i'^\top]^\top$;
 - 4: **if** ξ'_i соответствует *вращательному* шарниру: $\|\omega_i'\| = 1$ и $\omega_i'^\top \mathbf{v}_i' = 0$ **then**
 - 5: Применим Лемму 2.1 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 6: получим $\mathbf{V}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{rev})$;
 - 7: извлечем $\mathbf{b}_{i-1}$, $\mathbf{l}_{i-1}$, $\beta_{i-1} = 0$ из $\mathbf{V}_{i-1}$;
 - 8: **else if** ξ'_i соответствует *поступательному* шарниру: $\|\omega_i'\| = 0$ **then**
 - 9: Применим Лемму 2.2 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 10: получим $\mathbf{V}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{psm})$;
 - 11: извлечем $\mathbf{b}_{i-1}$, $\mathbf{l}_{i-1} = \mathbf{0}$, $\beta_{i-1} = 0$ из $\mathbf{V}_{i-1}$;
 - 12: **else if** ξ'_i соответствует *винтовому* шарниру: $\|\omega_i'\| = 1$ и $\omega_i'^\top \mathbf{v}_i' = h$ **then**
 - 13: Применим Лемму 2.3 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 14: получим $\mathbf{V}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{hel})$;
 - 15: извлечем $\mathbf{b}_{i-1}$, $\mathbf{l}_{i-1}$, $\beta_{i-1} = 0$ из $\mathbf{V}_{i-1}$;
 - 16: **end if**
 - 17: **end for**
 - 18: Вычислим $\mathbf{V}_n$ и СРС параметры $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{l}_n$, β_n применяя Утверждение 2.1 к $(\mathbf{V}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{n-1})^{-1} \exp(\hat{\xi}_{Tool})$;
 - return** СРС параметры $\mathbf{b}_i$, $\mathbf{l}_i$, β_i при $i = \overline{0, n}$.
-

Теорема 2.1. Алгоритм 2.1 позволяет пересчитывать параметры РОЕ модели в СРС для любого допустимого набора РОЕ параметров.

Доказательство. На основании (2.16) прямая кинематика манипулятора в форме РОЕ может быть записана как

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \exp(q_1 \hat{\xi}_1) \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}), \quad (2.33)$$

Далее, в зависимости от типа шарнира, применим Леммы 2.1–2.3 к $\exp(q_1 \hat{\xi}_1)$:

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \mathbf{V}_0 \exp(q_1 \hat{\xi}_1') \mathbf{V}_0^{-1} \exp(q_2 \hat{\xi}_2) \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}), \quad (2.34)$$

где $\mathbf{V}_0 = \mathbf{R}(\mathbf{b}_0) \mathbf{Rot}_z(\beta_0) \mathbf{Tran}_{[x,y,z]}(\mathbf{l}_0)$ (причем $\beta_0 = 0$) — матрица перехода, определяемая найденными параметрами СРС, а $\hat{\xi}_1'$ — кинематический винт для *вращательного, призматического* или *винтового* шарнира, который определяется (2.13), (2.14) или (2.15) соответственно. Перегруппируем (2.34), используя известное свойство матричной экспоненты $\mathbf{N} \exp(\mathbf{M}) \mathbf{N}^{-1} = \exp(\mathbf{N} \mathbf{M} \mathbf{N}^{-1})$ и обозначая $\mathbf{Q}_i \triangleq \exp(q_i \hat{\xi}_i')$ для $i = \overline{1, n}$. Получим:

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}_1 \exp(q_2 \mathbf{V}_0^{-1} \hat{\xi}_2 \mathbf{V}_0) \mathbf{V}_0^{-1} \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}). \quad (2.35)$$

Упрощая $\mathbf{V}_0^{-1} \hat{\xi}_2 \mathbf{V}_0$ с помощью присоединенного оператора (2.18), (2.17), определим $\hat{\xi}_2' = \text{Ad}(\mathbf{V}_0^{-1}) \hat{\xi}_2$. Тогда (2.35) преобразуется к виду:

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}_1 \exp(q_2 \hat{\xi}_2') \mathbf{V}_0^{-1} \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}). \quad (2.36)$$

Шаги (2.34)–(2.36) применяются рекурсивно для $i = \overline{2, n}$ с $\hat{\xi}_i' = \text{Ad}\left((\mathbf{V}_0 \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{i-2})^{-1}\right) \hat{\xi}_i$, что дает окончательное выражение:

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{Q}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{Q}_n (\mathbf{V}_0 \cdot \dots \cdot \mathbf{V}_{n-1})^{-1} \exp(\hat{\xi}_{Tool}). \quad (2.37)$$

Применяя Утверждение 2.1 для произвольного константного (который не зависит от q_i) кинематического винта $\mathbf{V}_{n-1}^{-1} \exp(\hat{\xi}_{Tool})$ из (2.37), находим $\mathbf{V}_n$ и соответствующие параметры СРС модели $\mathbf{b}_n$, $\mathbf{l}_n$, β_n . Это позволяет представить выражение для преобразования прямой кинематики (2.16) в форме СРС:

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \mathbf{V}_0 \mathbf{Q}_1 \mathbf{V}_1 \mathbf{Q}_2 \cdot \dots \cdot \mathbf{Q}_{n-1} \mathbf{V}_{n-1} \mathbf{Q}_n \mathbf{V}_n, \quad (2.38)$$

где каждое $\mathbf{T}_i = \mathbf{Q}_i \mathbf{V}_i$ представляет собой однородное преобразование (2.5) для системы координат i , составленное из матрицы движения $\mathbf{Q}_i$ и матрицы формы $\mathbf{V}_i$ согласно (2.7). $\square$

2.3.2. Пересчет модели на основе произведения матричных экспонент в модель Хаяти

Техника доказательства пересчета РОЕ–НАУ в целом схожа с ранее рассмотренным случаем РОЕ–СРС, однако сначала необходимо сделать важное замечание.

Замечание 2.2. Поскольку модель Хаяти применяется в случае, когда оси соседних шарниров номинально параллельны, то для вектора $\boldsymbol{\omega}_i$, выраженного в системе координат $\{i - 1\}$, выполняется неравенство $\omega_{i,3} > 0$, где $\omega_{i,3}$ — компонента $\boldsymbol{\omega}_i$ вдоль оси z .

Далее формулируются и доказываются леммы для преобразования вращательного шарнира (Лемма 2.4), поступательного (Лемма 2.5), винтового (Лемма 2.6) и для случая произвольного константного преобразования (Утверждение 2.2).

Лемма 2.4. Пусть для вращательного шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\xi})$. Тогда соответствующие НАУ параметры могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{H} \text{Rot}_z(q) \mathbf{H}^{-1}$, где $\mathbf{H} = \text{Rot}_z(\theta) \text{Tran}_x(a) \text{Rot}_x(\alpha) \text{Rot}_y(\beta)$.

Доказательство. Для произвольного кинематического винта ξ в случае вращательного шарнира существует матрица $\mathbf{H}$ такая, что:

$$\exp(q\hat{\xi}) = \mathbf{H} \exp(q\hat{\xi}_{rev}) \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \text{Rot}_z(q) \mathbf{H}^{-1}, \quad (2.39)$$

где $\mathbf{H} = \text{Rot}_z(\theta) \text{Tran}_x(a) \text{Rot}_x(\alpha) \text{Rot}_y(\beta)$ из (2.3). Преобразование (2.39) можно также переписать в линейной форме с использованием присоединенного оператора (2.18) и (2.19):

$$\xi = \text{Ad}(\mathbf{H})\xi_{rev} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \hat{t} \tilde{\mathbf{H}} & \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \xi_{rev}, \quad (2.40)$$

где $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{SO}(3)$ и $t \in \mathbb{R}^3$ — компоненты $\mathbf{H}$. Соотношения для параметров РОЕ–НАУ можно получить, подставив $\mathbf{H}$ в явной форме (2.3) в (2.40), с учетом $\omega_3 > 0$ (Замечание 2.2):

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta) \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) \\ \sin(\beta) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a\omega_3 \sin(\theta) \\ -a\omega_3 \cos(\theta) \\ -a \sin(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (2.41)$$

Если $\omega_3 = 1$: тогда $\omega_1 = \omega_2 = v_3 = 0$, следовательно, $\alpha = \beta = 0$, $\theta = \text{atan2}(-v_1, v_2)$ и $a = v_1 \sin(\theta) - v_2 \cos(\theta)$ — одно из возможных решений (2.41).

В противном случае: следует отметить, что $\omega_3 > 0$ и $a \neq 0$ являются особенностью НАУ параметров, упомянутой выше. В этом случае из части v системы (2.41) можно получить $\theta = \text{atan2}(-v_1, v_2)$ и $a = (v_1 \sin(\theta) - v_2 \cos(\theta)) / \omega_3$. Остальные параметры находятся из части ω системы (2.41) следующим образом: $\beta = \arcsin(\omega_1 \cos(\theta) + \omega_2 \sin(\theta))$ и $\alpha = \text{atan2}(\omega_1 \sin(\theta) - \omega_2 \cos(\theta), \omega_3)$, поскольку $\cos(\beta) \neq 0$ в силу $\omega_3 \neq 0$. $\square$ $\square$

Лемма 2.5. Пусть для поступательного шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\xi})$. Тогда соответствующие параметры НАУ могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{H} \text{Tran}_z(q) \mathbf{H}^{-1}$, где $\mathbf{H} = \text{Tran}_z(d) \text{Rot}_x(\alpha) \text{Rot}_y(\beta)$.

Доказательство. Для произвольного кинематического винта ξ в случае поступательного шарнира существует матрица $\mathbf{H}$ такая, что:

$$\exp(q\hat{\xi}) = \mathbf{H} \exp(q\hat{\xi}_{psm}) \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \text{Tran}_z(q) \mathbf{H}^{-1}, \quad (2.42)$$

где $\mathbf{H} = \text{Tran}_z(d) \text{Rot}_x(\alpha) \text{Rot}_y(\beta)$ из (2.4). Преобразование (2.42) можно также выразить с помощью присоединенного оператора (2.18), (2.19), и затем, подставляя $\mathbf{H}$ для поступательного шарнира (2.4), получить:

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta) \\ -\sin(\alpha) \cos(\beta) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}. \quad (2.43)$$

Если $v_3 = 1$: тогда $\alpha = \beta = d = 0$ является решением (2.43) в силу $\|v\| = 1$.

В противном случае: $\beta = \arcsin(v_1)$ и $\alpha = -\text{atan2}(v_2, v_3)$, $d = 0$ — решение (2.43). $\square$

Лемма 2.6. Пусть для винтового шарнира матрица однородного преобразования в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(q\hat{\xi})$. Тогда соответствующие НАУ параметры могут быть получены из разложения $\mathbf{T} = \mathbf{H} \mathbf{Rot}_z(q) \mathbf{Tran}_z(hq) \mathbf{H}^{-1}$, где $\mathbf{H} = \mathbf{Rot}_z(\theta) \mathbf{Tran}_x(a) \mathbf{Rot}_x(\alpha) \mathbf{Rot}_y(\beta)$.

Доказательство. Для произвольного кинематического винта ξ в случае винтового шарнира существует матрица $\mathbf{H}$ такая, что:

$$\exp(q\hat{\xi}) = \mathbf{H} \exp(q\hat{\xi}_{hel}) \mathbf{H}^{-1} = \mathbf{H} \mathbf{Rot}_z(q) \mathbf{Tran}_z(q) \mathbf{H}^{-1}, \quad (2.44)$$

где $\mathbf{H} = \mathbf{Rot}_z(\theta) \mathbf{Tran}_x(a) \mathbf{Rot}_x(\alpha) \mathbf{Rot}_y(\beta)$ определена согласно (2.3) и $h = \omega^\top v$. Преобразование (2.44) в присоединенной форме записывается следующим образом:

$$\xi = Ad(\mathbf{H}) \xi_{hel} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{H}} & \mathbf{O}_{3 \times 3} \\ \hat{t} \tilde{\mathbf{H}} & \tilde{\mathbf{H}} \end{bmatrix} \xi_{hel}, \quad (2.45)$$

где $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{SO}(3)$ и $t \in \mathbb{R}^3$ — компоненты $\mathbf{H}$. Соотношения для параметров РОЕ–Хаяти можно получить, подставив $\mathbf{H}$ в замкнутой форме (2.3) в (2.45):

$$\begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\beta) \cos(\theta) + \sin(\alpha) \cos(\beta) \sin(\theta) \\ \sin(\beta) \sin(\theta) - \sin(\alpha) \cos(\beta) \cos(\theta) \\ \cos(\alpha) \cos(\beta) \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \omega_3 \sin(\theta) & \omega_1 \\ -\omega_3 \cos(\theta) & \omega_2 \\ -\sin(\alpha) \cos(\beta) & \omega_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ h \end{bmatrix}. \quad (2.46)$$

Следует отметить, что замена координат $u = v - h\omega$ сводит решение задачи (2.46) к ранее найденному решению (2.41) с $\omega^\top u = 0$ и $\|\omega\| = 1$. $\square$

Поскольку для описания произвольной константной матрицы однородного преобразования требуется шесть независимых параметров, вместо двукратного последовательного применения преобразования (2.3), как в [15], представляется более целесообразным дополнить выражение (2.4) параметрами линейных смещений b и d вдоль осей y и z , соответственно, по аналогии с [8].

Замечание 2.3. Отметим, что Утверждение 2.2 следует применять, если ось z желаемой системы координат $\{Tool\}$ номинально или почти параллельна оси n -го шарнира; в противном случае необходимо выбрать вариант DH [15].

Утверждение 2.2. Пусть для произвольной константной матрицы однородного преобразования $\mathbf{T}$ в форме РОЕ имеет вид $\mathbf{T} = \exp(\hat{\xi})$. Тогда соответствующие НАУ параметры могут быть получены из $\mathbf{H} = \mathbf{Rot}_z(\theta) \mathbf{Tran}_{[x,y,z]}([a,b,d]^\top) \mathbf{Rot}_x(\alpha) \mathbf{Rot}_y(\beta)$.

Доказательство. Можно видеть, что компонента $\tilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{SO}(3)$ матрицы $\mathbf{H}$ имеет структуру углов Тэйта–Брайана (Tait-Bryan angles) в конфигурации $Z_\theta X_\alpha Y_\beta$. Таким образом, решение хорошо известно [132]: $\alpha = \arcsin(h_{32})$, $\theta = \text{atan2}(-h_{21}, h_{22})$, $\beta = \text{atan2}(-h_{31}, h_{33})$, где h_{ij} — ij элемент матрицы $\mathbf{H}$. Компонента перемещения $t \in \mathbb{R}^3$ матрицы $\mathbf{H}$ имеет структуру:

$$t = \begin{bmatrix} a \cos(\theta) - b \sin(\theta) & a \sin(\theta) + b \cos(\theta) & d \end{bmatrix}^\top, \quad (2.47)$$

а остальные параметры НАУ: $d = h_{34}$, $a = h_{14} \cos(\theta) + h_{24} \sin(\theta)$ и $b = h_{24} \cos(\theta) - h_{14} \sin(\theta)$. $\square$

Алгоритм 2.2 Алгоритм по пересчету РОЕ-НАУ параметров

Require: РОЕ параметры ξ_i , ξ_{Tool} при $i = \overline{1, n}$, которые определяют прямую кинематику

$$\mathbf{T}_0^{Tool} = \exp(q_1 \hat{\xi}_1) \cdot \dots \cdot \exp(q_n \hat{\xi}_n) \exp(\hat{\xi}_{Tool}).$$

- 1: **for** $i = \overline{1, n}$ при $\mathbf{H}_{-1} = \mathbb{I}$ **do**
 - 2: Перезапишем $(\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{i-2})^{-1} \exp(q_i \hat{\xi}_i)$ как $\exp\left(q_i (\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{i-2})^{-1} \hat{\xi}_i (\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{i-2})\right) \cdot (\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{i-2})^{-1}$;
 - 3: Обозначим $\xi'_i = Ad\left((\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{i-2})^{-1}\right) \xi_i$ используя (2.17), (2.18) где $\xi'_i = [\omega_i'^T v_i'^T]^T$;
 - 4: **if** ξ'_i соответствует *вращательному* шарниру: $\|\omega'_i\| = 1$ и $\omega_i'^T v'_i = 0$ **then**
 - 5: Применим Лемму 2.4 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 6: получим $\mathbf{H}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{rev})$;
 - 7: извлечем α_{i-1} , β_{i-1} , θ_{i-1} , a_{i-1} из $\mathbf{H}_{i-1}$;
 - 8: **else if** ξ'_i соответствует *поступательному* шарниру: $\|\omega'_i\| = 0$ **then**
 - 9: Применим Лемму 2.5 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 10: получим $\mathbf{H}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{psm})$;
 - 11: извлечем α_{i-1} , β_{i-1} , d_{i-1} из $\mathbf{H}_{i-1}$;
 - 12: **else if** ξ'_i соответствует *винтовому* шарниру: $\|\omega'_i\| = 1$ и $\omega_i'^T v'_i = h$ **then**
 - 13: Применим Лемму 2.6 к $\exp(q_i \hat{\xi}'_i)$
 - 14: получим $\mathbf{H}_{i-1}$ и $\mathbf{Q}_i = \exp(q_i \hat{\xi}_{hel})$;
 - 15: извлечем α_{i-1} , β_{i-1} , θ_{i-1} , a_{i-1} из $\mathbf{H}_{i-1}$;
 - 16: **end if**
 - 17: **end for**
 - 18: Вычислим $\mathbf{H}_n$ и НАУ параметры $a_n, b_n, d_n, \alpha_n, \beta_n, \theta_n$, применяя Утверждение 2.2 к $(\mathbf{H}_{-1} \cdot \dots \cdot \mathbf{H}_{n-1})^{-1} \exp(\hat{\xi}_{Tool})$;
 - return** НАУ параметры $\alpha_i, \beta_i, \theta_i, a_i, d_i$ и $a_n, b_n, d_n, \alpha_n, \beta_n, \theta_n$ при $i = \overline{0, n-1}$.
-

Теорема 2.2. Алгоритм 2.2 позволяет пересчитывать параметры РОЕ модели в НАУ для любого допустимого набора РОЕ параметров.

Доказательство. Доказательство данной Теоремы доказывается по аналогии с Теоремой 2.1, поскольку модель Хаяти, как и СРС, допускает декомпозицию матрицы однородного преобразования $\mathbf{T}$ на движение в шарнире $\mathbf{Q}$ вокруг оси z и геометрию звена $\mathbf{H}$, где $\mathbf{H}$ имеет вид (2.3) или (2.4). В частности, для каждого типа шарниров применяются Леммы 2.4–2.6, а для константного преобразования — Утверждение 2.2. $\square$

2.3.3. Пересчет параметров полной и параметрически непрерывной модели и модели Хаяти в модель на основе произведения матричных экспонент

Обратный переход от СРС и НАУ моделей к РОЕ может быть осуществлен с небольшими изменениями Теорем 2.1, 2.2 и подхода, представленного в [13, 14, 97].

Как отмечалось ранее, НАУ модель, как и СРС, допускает декомпозицию матрицы однородного преобразования $T = QV$ (2.5). Исходя из прямой кинематики в форме СРС (2.5), заданной как

$$T_0^{Tool} = V_0 Q_1 V_1 Q_2 \dots Q_{n-1} V_{n-1} Q_n V_n, \quad (2.48)$$

где Q_i зависит от типа шарнира (вращательный, призматический или винтовой) для $i = \overline{1, n}$ и может быть выражена как $\exp(q_i \hat{\xi}_i)$, где $\hat{\xi}_i$ задается согласно (2.13), (2.14) или (2.15). Подставляя это в (2.48), получаем:

$$T_0^{Tool} = V_0 \exp(q_1 \hat{\xi}_1) V_1 \exp(q_2 \hat{\xi}_2) \dots \exp(q_{n-1} \hat{\xi}_{n-1}) V_{n-1} \exp(q_n \hat{\xi}_n) V_n. \quad (2.49)$$

Вводя преобразованный винт $\hat{\xi}'_i = (V_0 \dots V_{i-1}) \hat{\xi}_i (V_0 \dots V_{i-1})^{-1}$, или, что эквивалентно, в присоединенной форме $\hat{\xi}'_i = Ad(V_0 \dots V_{i-1}) \hat{\xi}_i$, и используя тождество $N \exp(M) N^{-1} = \exp(NMN^{-1})$, справедливое для любых $N, M \in \mathbb{SE}(3)$, можно переписать (2.49) как:

$$T_0^{Tool} = \exp(q_1 \hat{\xi}'_1) \exp(q_2 \hat{\xi}'_2) \dots \exp(q_{n-1} \hat{\xi}'_{n-1}) \exp(q_n \hat{\xi}'_n) \exp(\hat{\xi}'_{Tool}), \quad (2.50)$$

где $\exp(\hat{\xi}'_{Tool}) = V_0 \dots V_n$. Аналогичные результаты получим для НАУ модели, произведя замену V_i на H_i и повторив выкладки (2.48)–(2.50).

2.3.4. Пересчет полной и параметрически непрерывной модели в модель Хаяти

Переход СРС–НАУ рассматривается аналогично переходу СРС–ДН (представленному и доказанному в [8], раздел V), поскольку только номинально параллельные последовательные шарниры должны быть описаны с помощью параметров НАУ модели (остальные описываются с помощью ДН). Пусть C_i это однородное преобразование для i -го звена в терминах параметров СРС, а D_i и H_i — в терминах ДН и НАУ соответственно ($i = \overline{1, n}$). Предположим, что только ось k -го шарнира параллельна оси $(k+1)$ -го; тогда должно выполняться следующее равенство

$$C_0 C_1 \dots C_n = D_0 \dots D_{k-1} H_k D_{k+1} \dots D_n. \quad (2.51)$$

Далее, для C_0 , представляющей произвольно назначенную систему координат $\{Base\}$, положим $D_0 = C_0$ [8], а для системы координат $\{Tool\}$ — $D_n = [D_1 \dots D_{n-1}]^{-1} C_1 \dots C_n$, где $D_1, \dots, D_{n-1}$ подлежат определению. Предлагаемый алгоритм описан ниже, где оператор $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение.

2.4. Иллюстративный пример

Для верификации предлагаемого подхода воспользуемся известной моделью манипулятора PUMA 560. Выбор данного объекта исследования обусловлен, в частности, удобством

Алгоритм 2.3 Алгоритм по пересчету CPC-HAY параметров

Require: Система координат D_0 — вектора b_0, p_0, w_0 ;

- 1: **for** $i = 1$ до n **do**
- 2: Выразить непосредственным образом вектор оси шарнира b_i и соответствующий вектор начала координат p_i системы координат $\{i\}$ звена CPC ($i = \overline{1, n}$) в системе координат $\{Base\}$, используя уравнения прямой кинематики (2.1);
- 3: **if** оси шарниров непараллельны **then**
- 4: Обозначить n_i как общую нормаль между осями i -го и $(i + 1)$ -го шарниров, s_i и w_{i+1} как точки пересечения общей нормали с осями i -го и $(i + 1)$ -го шарниров соответственно;
- 5: **else**
- 6: Определить n_k, s_k, w_{k+1} и соответствующие параметры Хаяти в случае номинально параллельных последовательных шарниров (см. рисунок 2.7):
- 7: Принять $s_k = 0$ и определить w_{k+1} как пересечение плоскости $\mathcal{B}_{k-1} \triangleq \{x \mid \langle b_{k-1}, w_k - x \rangle\}$ и прямой $\mathcal{L}_k \triangleq \{x \mid p_k + \tau b_k, \tau \in \mathbb{R}\}$ следующим образом:

$$w_{k+1} = p_k + \frac{\langle b_k, w_k - p_k \rangle}{\langle b_{k-1}, b_k \rangle} b_k,$$

$$\theta_k = \text{atan2}\left(\langle b_{k-1} \times n_{k-1}, \bar{w}_{k+1} \rangle, \langle n_{k-1}, \bar{w}_{k+1} \rangle\right),$$

$$d_k = \|w_{k+1} - w_k\|,$$

где $\bar{w}_{k+1} = (w_{k+1} - w_k) / \|w_{k+1} - w_k\|$;

- 8: Выразить b_k в системе координат, образованной векторами $\bar{w}_{k+1}, b_{k-1} \times \bar{w}_{k+1}$ и b_{k-1} . Затем для нахождения параметров Хаяти α_k и β_k :

$$\alpha_k = \arcsin\left(\langle b_k, b_{k-1} \times \bar{w}_{k+1} \rangle\right),$$

$$\beta_k = -\text{atan2}\left(\cos(\alpha) \langle b_k, \bar{w}_{k+1} \rangle, \cos(\alpha) \langle b_k, b_{k-1} \rangle\right),$$

следовательно,

$$n_k = \text{Rot}_y^\top(\beta) \text{Rot}_x^\top(\alpha) \bar{w}_{k+1}$$

- 9: **end if**
 - 10: Применить алгоритм [8] (раздел V) для извлечения параметров ДН из оставшихся для $i = \overline{0, n}, i \neq k$ систем координат;
 - 11: **end for**
 - return** HAY параметры $\alpha_k, \beta_k, \theta_k, d_k$; ДН параметры $\theta_i, \alpha_i, d_i, a_i$ для $i = \overline{0, n-1}, i \neq k$, а также $a_n, b_n, d_n, \alpha_n, \beta_n, \theta_n$.
-

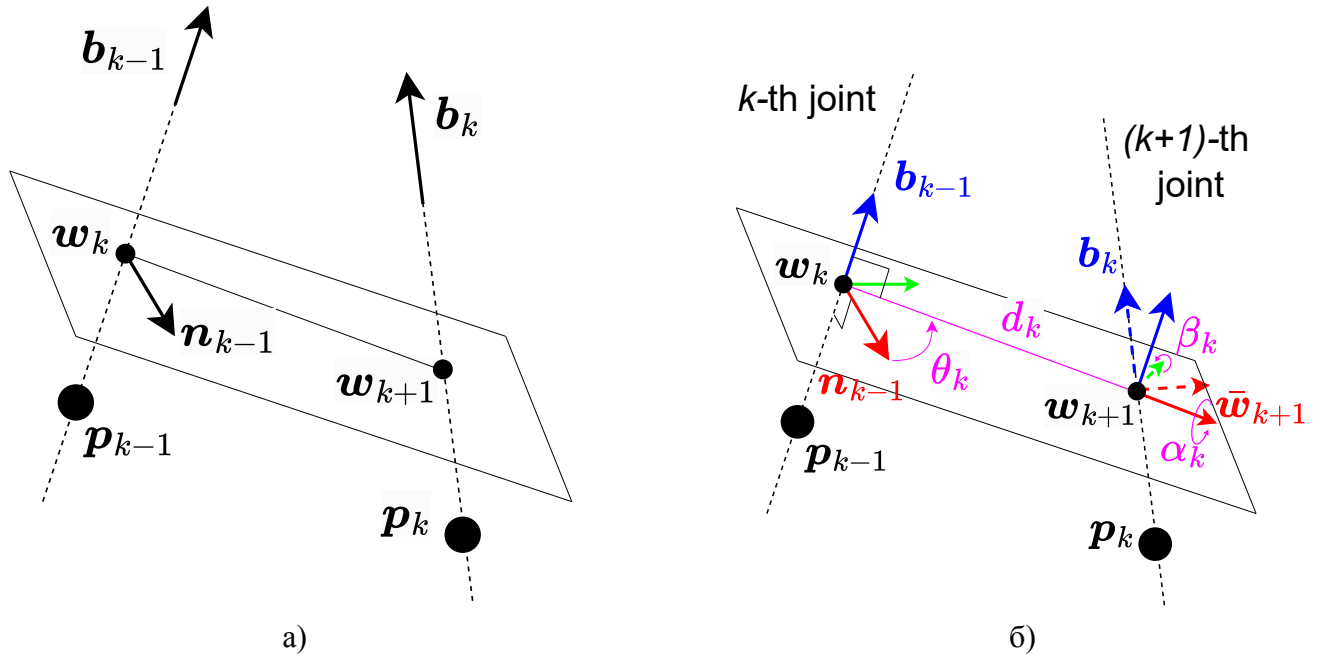


Рисунок 2.7 — Геометрические построения для преобразования CPC–HAY: а) вспомогательные; б) окончательные

сопоставления полученных результатов с имеющимися в литературе, поскольку номинальные и фактические параметры PUMA 560 в форме POE, приведенные в работе [97], неоднократно использовались в предшествующих исследованиях (см., например, [19, 98, 101]).

В таблице 3 представлены фактические параметры модели POE — кинематические винты ξ_i для каждого шарнира $i = \overline{1,6}$ и константный винт, определяющий систему координат инструмента ξ_{tool} в нулевой конфигурации — и соответствующие значения параметра $h_i \triangleq \omega_i^\top v_i$, характеризующего винтовую структуру движения.

Таблица 3 — Фактические параметры POE манипулятора Puma 560 [97]

	ω			v			h
ξ_1	0.04	-0.02	0.999	0.02	0.04	0	0
ξ_2	0	-1.000	0	-0.02	0	0.05	0
ξ_3	0.178	-0.984	-0.001	-0.07	0.009	-101	0.080
ξ_4	0.062	0.013	-0.998	-51	249	0.075	-4.96e-5
ξ_5	0.001	-1.000	0	-20.6	-0.021	-249	8.24e-7
ξ_6	0.095	0.031	-0.995	-51	249	0	-2.874
ξ_{tl}	0.02	-0.01	0.01	249	51	-20.6	—

Из шести компонент вектора h четыре соответствуют винтовым кинематическим парам (по существу, только две — для третьего и шестого звеньев). Следует, однако, отметить, что параметризации DH, HAY и CPC изначально разрабатывались для описания исключительно поступательных и вращательных шарниров. Тем не менее рассматриваемые соглашения допускают разложение матрицы однородного преобразования T (см. (2.2), (2.3), (2.5)) на компоненту движения в шарнире Q и компоненту геометрии звена V , так что $T = QV$,

что согласуется с подходом, описанным в [8, 130]. В силу коммутативности поворота и поступательного сдвига вдоль одной оси z скалярный параметр h может быть учтен путем представления

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Rot}_z(j\,q) \mathbf{Tran}_z(q\,h), \quad (2.52)$$

где $j = 1$ и $h = 0$ для вращательного шарнира, $j = 0$ и $h = 1$ — для призматического, $j = 1$ и $h \neq 0$ — для винтового. При этом методология, предложенная в [98] для параметризации ДН *применима также* и к СРС, и НАУ моделям. Таким образом, универсальная модель (2.52) использовалась в дальнейших выкладках.

Для манипулятора PUMA 560 пересчет кинематических параметров из РОЕ в СРС и НАУ модели осуществлялись на основе алгоритмов 2.1 и 2.2, доказанных в Теоремах 2.1 и 2.2. В соответствии с подходом, изложенным в [70, 98], кинематический винт ξ подлежит нормировке: $\bar{\xi}$ обозначает нормированный кинематический винт. А именно, $\xi = \lambda \bar{\xi}$ при $\xi = \begin{bmatrix} \omega^\top & v^\top \end{bmatrix}^\top$, где коэффициент λ определяется как $\lambda \triangleq \|\omega\|$ в случае вращательного и винтового шарнира, и $\lambda \triangleq \|v\|$ для поступательного шарнира. Далее, СРС параметры, полученные путем пересчета РОЕ–СРС, были преобразованы в параметры НАУ модели посредством алгоритма 2.3.

Точность рассматриваемых алгоритмов пересчета оценивалась путем сравнения положения и ориентации системы координат $\{Tool\}$ на некотором наборе конфигураций. В частности, сто тестовых точек ($i = \overline{1, 100}$) $q_i = \mathcal{U}_{[-\pi, \pi]} \in \mathbb{R}^6$ были равномерно выбраны в пространстве шарниров $\mathcal{Q}$. Для каждой конфигурации q_i преобразования прямой кинематики вычислялись для пересчитанных моделей и для фактической модели в РОЕ форме (Таблица 3), которые были обозначены как $\mathbf{T}_{conv}^i$ и $\mathbf{T}_{act}^i$ соответственно. При проверке преобразования СРС–НАУ эталонное преобразование $\mathbf{T}_{act}^i$ вычислялось с использованием параметров СРС, полученных на этапе РОЕ–СРС, что позволяет изолировать ошибку, вносимую двухшаговой процедурой. Ошибки положения и ориентации, e_{pos} и e_{or} , вычислялись следующим образом:

$$e_{pos} = \|\mathbf{t}_{act}^i - \mathbf{t}_{conv}^i\|, \quad e_{or} = \left\| \mathbf{EUL} \left(\tilde{\mathbf{T}}_{act}^{i^\top} \tilde{\mathbf{T}}_{conv}^i \right) \right\|, \quad (2.53)$$

где $\mathbf{t}_{act}, \mathbf{t}_{conv} \in \mathbb{R}^3$ и $\tilde{\mathbf{T}}_{act}, \tilde{\mathbf{T}}_{conv} \in \mathbf{SO}(3)$ — компоненты матриц $\mathbf{T}_{act}$ и $\mathbf{T}_{conv}$ соответственно, а $\mathbf{EUL}(\cdot) : \mathbf{SO}(3) \mapsto \mathbb{R}^3$ — преобразование, осуществляющее разложение матрицы поворота на углы Эйлера в конфигурации $\mathbf{ZYX}$. Соответствующие ошибки преобразования приведены в Таблице 4.

Таблица 4 — Ошибки преобразования положения и ориентации для PUMA 560 для 100 конфигураций

		РОЕ-СРС	РОЕ-НАУ	СРС-НАУ	СРС-РОЕ	НАУ-РОЕ
Среднее	поз., $\times 10^{-16}$ м	2,0942	3,1664	1,5573	1,9552	3,5370
	ор., $\times 10^{-15}$ рад	2,4706	2,0175	1,8728	0,6076	0,4412
Макс.	поз., $\times 10^{-16}$ м	6,5308	6,6739	3,3297	4,2723	5,8183
	ор., $\times 10^{-15}$ рад	3,7976	4,0472	3,4483	1,4166	1,3643

Ошибки преобразования для предлагаемых процедур POE–CPC, POE–HAY, CPC–HAY, CPC–POE и HAY–POE согласуются со стандартной ошибкой округления MATLAB, составляющей порядка 1×10^{-16} , а также имеют тот же порядок величины, что и ошибка преобразования POE–DH в работах [15, 98].

Здесь возникает важный вопрос: в чем заключается преимущество предлагаемых выше процедур пересчета, если, например, тот же переход POE–CPC, в соответствии с Рис. 1.1, можно получить последовательным применением преобразования POE–DH [98]¹ и, затем, DH–CPC [8]. Во-первых, в силу машинной точности переход POE–DH–CPC должен быть менее точным — результаты отдельного теста на 1000 конфигураций представлены ниже в Таблице 5.

Таблица 5 — Сравнение подходов POE–DH–CPC и POE–CPC: ошибки положения и ориентации для робота PUMA 560 на 1000 конфигурациях

		POE–DH–CPC ^a	POE–CPC
Среднее	поз., 10^{-16} м	4,3985	2,2022
	ор., 10^{-15} рад	2,3828	2,4062
Макс.	поз., 10^{-16} м	10,5545	7,3824
	ор., 10^{-15} рад	4,4111	3,9381

^aПреобразование POE–DH выполнено с помощью подхода, представленного в [98], затем преобразование DH–CPC выполнено с использованием результатов [8].

Можно видеть, что ошибки преобразования, полученные с помощью предлагаемого прямого метода POE–CPC, стабильно меньше, чем ошибки, получаемые последовательным подходом POE–DH–CPC; при этом обе остаются на том же числовом порядке, что и стандартная ошибка округления MATLAB (приблизительно 1×10^{-16}).

Схожие результаты наблюдаются при сравнении времени выполнения программного кода для обоих преобразований (Таблица 6).

Таблица 6 — Сравнение времени выполнения алгоритмов пересчета POE–DH–CPC и POE–CPC на 1000 запусках^b

		POE–DH–CPC	POE–CPC
Среднее	10^{-5} с	21.24	16.62
СКО	10^{-6} с	10.71	5.13
Мин.	10^{-5} с	20.31	16.21
Макс.	10^{-5} с	40.10	22.31

^bВсе вычисления были выполнены в среде Matlab на ПК с процессором Intel Core i9-10900 (2.8 Hz) и видеокартой Nvidia GeForce RTX 2060 GPU в одинаковых условиях.

Тем не менее основное преимущество *предлагаемого* метода лежит за пределами сугубо вычислительной точности и становится очевидным при содержательном анализе результатов. Для

¹Данное преобразование реализовано с помощью программного обеспечения с открытым исходным кодом <https://github.com/drliaowu/GeneralPOE2DH>

этого рассмотрим результат пересчета, полученный последовательным алгоритмом РОЕ–ДН–СРС (Таблица 7), и результат *предлагаемого* метода РОЕ–СРС (Таблица 8). То же самое касается преимущества предлагаемого перехода РОЕ–НАУ, по сравнению с известным РОЕ–ДН–НАУ, который выполняется последовательным применением результатов [15] и [16].

Таблица 7 — Параметры СРС модели для манипулятора Puma 560, полученные последовательным применением алгоритмов РОЕ–ДН [98] и ДН–СРС [8]

b			l			β
0,040	-0,020	0,999	0,000	0,045	0,999	1,107
-0,894	-0,447	0,020	0,009	1,021	-0,020	2,034
-0,178	-0,006	0,984	0,511	-101,047	-558,589	-1,536
-0,998	-0,069	-0,001	153,304	552,752	-0,419	-1,502
-0,177	0,984	-0,013	1,837	30,190	-0,391	-2,964
-0,033	0,999	-0,031	3,176	-0,792	0,025	-3,108
0,085	-0,011	-0,996	-3,245	0,338	1,488	2,897

Таблица 8 — Параметры СРС модели для манипулятора Puma 560, преобразованные с помощью предлагаемого алгоритма РОЕ–СРС

b			l			β
0,040	-0,020	0,999	-0,040	0,020	0	0
-0,000	-1,000	0,020	-0,009	-0,022	0	0
0,178	0,006	0,984	100,972	3,946	0	0
0,103	-0,995	-0,001	153,092	9,939	0	0
-0,277	0,961	-0,013	6,593	-29,523	0	0
-0,123	0,992	-0,031	-0,725	-0,175	0	0
-0,098	-0,063	0,993	0,668	1,575	1,653	0,132

Как можно заметить, во-первых, по сравнению с последовательным преобразованием РОЕ–ДН–СРС, *предлагаемый* алгоритм гарантирует, что параметры СРС являются минимальными — $l_z = \beta = 0$ для всех систем координат, кроме $\{Tool\}$ и $\{Base\}$ (которая в симуляции для простоты была принята единичной) — что критически важно для идентификации параметров и сходимости численных методов оптимизации. Во-вторых, СРС модель, полученная через преобразование РОЕ–ДН–СРС, **неизбежно наследует** параметрическую сингулярность, присущую параметрам ДН — одну из ключевых причин разработки альтернативных кинематических представлений — что ранее отмечалось как в литературе [2, 3], так и в данной работе (Рис. 2.3, Таблица 2). Параметры, подвергшиеся данному явлению, выделены красным цветом в Таблице 7.

2.5. Экспериментальный пример: пересчет параметров в задаче кинематической калибровки

Цель данного раздела — экспериментально продемонстрировать, каким образом схемы преобразования параметров, представленные на Рис. 1.1, включая вклад данного исследования — переходы POE–CPC–POE, POE–HAY–POE и CPC–HAY —, могут быть плодотворно использованы на примере задачи кинематической калибровки промышленного манипулятора.

Для последовательности повествования сначала напомним основные этапы кинематической калибровки промышленных манипуляторов, согласно [1]: *моделирование* — выбор кинематической модели; *измерения* — получения набора $i = \overline{1, k}$ измерений конфигураций манипулятора $\mathbf{q}_i \in \mathbb{S}^n$ и внешних измерений положения и ориентации инструмента $\mathbf{y}_i \in \mathbb{R}^6$ в системе координат $\{World\}$. Этап *идентификации* формулируется и решается, в общем случае, как нелинейная оптимизационная задача (см. [17]), например,

$$\underset{\Delta\Phi}{\operatorname{argmin}} \sum_{i=1}^k (\mathbf{y}_i - g(\mathbf{q}_i, \Phi_0 + \Delta\Phi))^T \mathbf{P} (\mathbf{y}_i - g(\mathbf{q}_i, \Phi_0 + \Delta\Phi)), \quad (2.54)$$

где $g(\mathbf{q}_i, \Phi_0 + \Delta\Phi) \in \mathbb{R}^6$ преобразует прямую кинематику $\mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \Phi_0 + \Delta\Phi) \in \mathbb{SE}(3)$ в компоненты положения и ориентации (в углах Эйлера) с номинальными кинематическими параметрами $\Phi_0 \in \mathbb{R}^m$; $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{6 \times 6}$ — положительно определенная весовая матрица; n — число шарниров, m — число кинематических параметров. На этапе *коррекции* решение задачи (2.54) $\Delta\hat{\Phi}$ в составе нового вектора кинематических параметров $\Phi_0 + \Delta\hat{\Phi}$ переносится на реальный манипулятор.

Разъяснив кратко постановку задачи кинематической калибровки, покажем по шагам, как именно применить приведенную на рисунке 1.1 схему по пересчету параметров:

1. Описать номинальную модель манипулятора с помощью DH, HAY, CPC или POE (шаг *моделирования*);
2. Пересчитать выбранную модель в остальные, используя схемы на рисунках 1.1 и 2.1;
3. Получить набор данных для калибровки (шаг *измерений*);
4. Выполнить идентификацию параметров с помощью DH, HAY, CPC и POE (шаг *идентификации*);
5. Провести проверку результатов на отдельной выборке и выбрать наилучшую модель;
6. Преобразовать наилучшую модель в ту модель, которая используется в вашем приложении, с помощью схемы на рисунках 1.1 и 2.1;
7. Перенести пересчитанные параметры на реальный манипулятор (шаг *коррекции*).

Экспериментальное оборудование для калибровки кинематических параметров включает промышленный манипулятор ABB IRB 1600 (10/1.45) и лазерный трекер API Radian EMSD3 (точность 0,7 мкм на метр) с датчиком Smart Track Sensor (точность ориентации 0,005°), как показано на Рис. 2.8 (расстояние между ABB 1600 и API Radian составляет приблизительно 3 метра). Система координат $\{World\}$ связана с датчиком лазерного трекера, система $\{Tool\}$ — с датчиком Smart Track Sensor, который был специальным образом закреплен на $\{Flange\}$ манипулятора. Система координат $\{Base\}$ связана с основанием ABB IRB 1600.

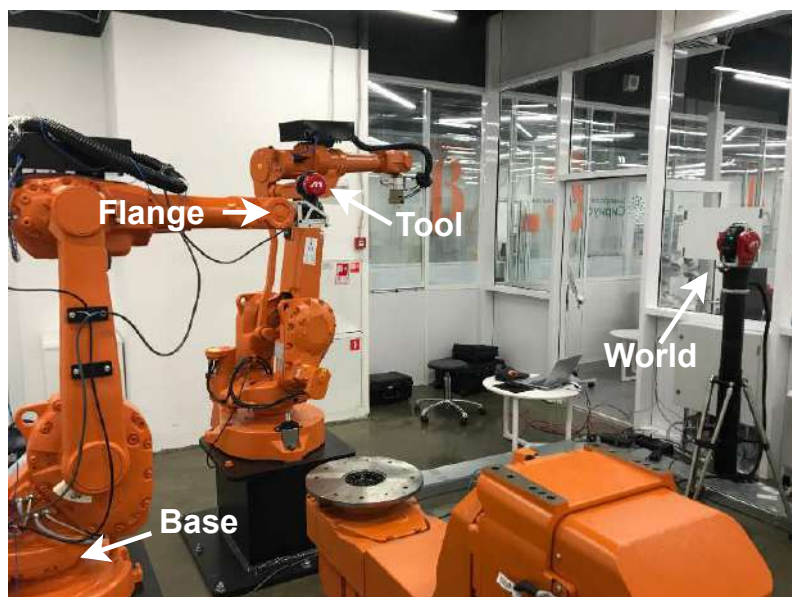


Рисунок 2.8 — Экспериментальная установка для калибровки ABB IRB 1600

Таким образом, положение и ориентация системы $\{Tool\}$ в системе $\{World\}$ с учетом прямой кинематики манипулятора $T_{Base}^{Flange}(q, \Phi)$ из (2.1) в общем виде определяются следующим выражением:

$$T_{World}^{Tool} = T_{World}^{Base} T_{Base}^{Flange}(q, \Phi) T_{Flange}^{Tool}, \quad (2.55)$$

где преобразование T_{Flange}^{Tool} от $\{Tool\}$ к $\{Flange\}$ известно в точности (с разрешением лазерного трекера). Преобразование T_{Base}^{World} от $\{World\}$ к $\{Base\}$ оценивалось по геометрии основания манипулятора и данным руководства ABB, которое затем использовалось в качестве начального приближения в задаче оптимизации.



Рисунок 2.9 — Фланец ABB IRB 1600 и измерительное устройство

Рассматриваемому манипулятору ABB IRB 1600 соответствуют кинематические параметры в POE форме, отмеченные на схеме (рисунок (2.10)), численные значения которых приведены ниже в таблице 9.

Затем, на основе результатов раздела 2.3, а также работы [15], параметры в форме POE были преобразованы в параметры моделей CPC, NAY и DH соответственно.

Хорошо известно [133—137], что выбор конфигураций, оптимальных для идентификации параметров (4.7) представляет собой отдельную содержательную задачу. Обыкновенно [17] выбор

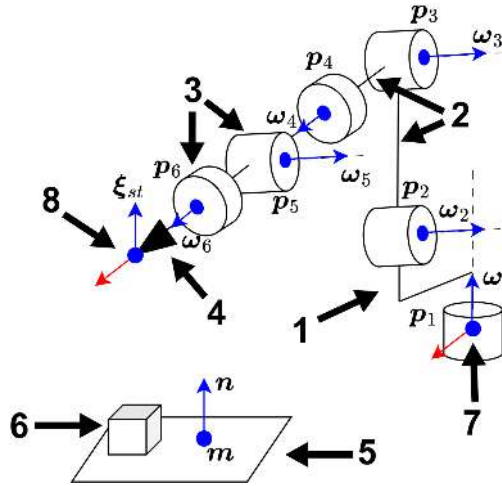


Рисунок 2.10 — Схема РОЕ параметров манипулятора ABB IRB 1600

Таблица 9 — Номинальные параметры РОЕ манипулятора ABB IRB 1600

	ω			v		
ξ_1	0.0	0.0	1.0	0.0	0.0	0.0
ξ_2	0.0	1.0	0.0	-486.5	0.0	150.0
ξ_3	0.0	1.0	0.0	-1186.5	0.0	150.0
ξ_4	1.0	0.0	0.0	0.0	1186.5	0.0
ξ_5	0.0	1.0	0.0	-1186.5	0.0	750.0
ξ_6	1.0	0.0	0.0	0.0	1186.5	0.0
ξ_{tool}	0.0	$\pi/2$	0.0	-291.7754	0.0	1571.9744

конфигурации основан на поиске экстремума так называемых *алфавитных* метрик (А-, D-, Е- или G-оптимальности). Поскольку данный раздел призван продемонстрировать возможность применения предлагаемых алгоритмов пересчета параметров, а не новый метод калибровки, и ради простоты изложения, конфигурации q_i для эксперимента были выбраны из равномерного распределения

$$q_i = \mathcal{U}_{[a,b]} \in \mathbb{R}^6, \quad (2.56)$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= [-0.3491, -0.4363, -0.6981, -0.5236, -0.5236, -0.5236]^\top, \\ \mathbf{b} &= [0.3491, 0.4363, 0.3491, 0.5236, 0.5236, 0.5236]^\top \end{aligned}$$

при $i = \overline{1,70}$. Далее, задача (2.54) была сформулирована с номинальными РОЕ параметрами Φ_0 9, весовой матрицей $\mathbf{P} = \text{diag}[1, 1, 1, 0,01, 0,01, 0,01]$, числом измерений $m = 70$ и числом кинематических параметров $n = 55$, т.е., 49 параметров РОЕ (Таблица 9) плюс 6 параметров системы $\{Base\}$.

Для решения задачи *идентификации* (2.54) применялся метод внутренней точки (реализация *fmincon* в *MATLAB* без ограничений) со следующими настройками решателя: максимальное число вычислений функции — 10^4 , максимальное число итераций — 10^4 , допуск по шагу — 10^{-12} , допуск по оптимальности — 10^{-12} .

После того как калиброванные параметры $\Phi_0 + \Delta\hat{\Phi}$ были получены, они были проверены на 35 конфигурационных точках, распределенных согласно (2.56) и не использовавшихся при идентификации. Результаты проверки приведены в таблице 10; ошибки положения вычислялись следующим образом:

$$e_i^{pos} = \left\| \mathbf{P}_{\text{proj}} \left(\mathbf{Y}_i - \mathbf{F}(\mathbf{q}_i, \hat{\Phi}) \right) \mathbf{r} \right\|, \quad i = \overline{1, 35}, \quad (2.57)$$

где $\mathbf{Y}_i \in \mathbb{SE}(3)$ — i -е измерение системы координат $\{Tool\}$, $\mathbf{f}(\mathbf{q}_i, \hat{\Phi}) \in \mathbb{SE}(3)$ — преобразование прямой кинематики (2.1) в конфигурации $\mathbf{q}_i \in \mathbb{S}^6$ с кинематическими параметрами $\hat{\Phi} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{P}_{\text{proj}} = \begin{bmatrix} \mathbb{I}_3 & \mathbf{O}_{3 \times 1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$, $\mathbf{r} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^\top$.

Таблица 10 — Проверка калибровки разомкнутой цепи на 35 точках (ошибки (2.57) в мм)

	Номинальные	DH	HAУ	CPC	POE
Среднее, мм	0,26	0,0928	0,0926	0,0766	0,0853
СКО, мм	0,11	0,0395	0,0394	0,0304	0,0374
Макс., мм	0,57	0,1816	0,1810	0,1318	0,1798

Здесь ошибки номинальной модели были вычислены с использованием таблицы 9 и параметров системы координат $\{Base\}$, найденных в процессе идентификации модели (они сходятся приблизительно к одним и тем же значениям для каждой параметризации).

Поскольку проверка с параметрами CPC является наиболее точной, а в нашем программном обеспечении ABB 1600 используется модель DH, необходимо выполнить преобразование CPC–DH, предложенное в [8], следуя рисунку 1.1.

Следует подчеркнуть, что целью данного эксперимента являлась не оценка предпочтительности той или иной кинематической модели для задач калибровки в общем, а наглядная демонстрация применимости предложенных алгоритмов в задачах калибровки. На качество калибровки влияет множество факторов, включая выбор идентификационных и проверочных конфигураций, их общее число и ряд других.

ГЛАВА 3. Кинематическая калибровка промышленных манипуляторов без внешних измерительных устройств

Кинематическая калибровка промышленного манипулятора, независимо от применяемого измерительного подхода — с использованием внешних датчиков или на основе внешних ограничений — включает четыре этапа [1]: *моделирование, измерения, идентификация и коррекция*. Различие между подходами проявляется на этапе измерений: в первом случае доступна матрица однородного преобразования $T_{\text{World}, i}^{\text{Tool}}$, связанная с концом инструмента, и соответствующие конфигурации q_i при $i = \overline{1, k}$; во втором — лишь конфигурации q_i .

Отсюда следует различие в постановке задачи идентификации. При наличии полных измерений положения и ориентации инструмента минимизируется невязка между измеренным $T_{\text{World}, i}^{\text{Tool}}$ и преобразованием прямой кинематики $F(q_i, \Phi)$ (2.1), например, как в (2.54). В случае внешних ограничений целевой функционал J зависит от $F(q_i, \Phi)$ и геометрии этих ограничений, что требует специальной постановки для обеспечения сходимости к фактическим параметрам. При моделировании кинематики манипулятора (2.1) использовались рассмотренные ранее параметризации DH, CPC и POE (раздел 2.2).

3.1. Постановка задачи

Для одновременного уточнения геометрических параметров манипулятора и оценок параметров калибровочных плоскостей предлагается расширить вектор оптимизационных параметров p , включив в него наряду с Φ нормали a_k плоскостей при $k = \overline{1, K}$. Задача идентификации в общем виде формулируется

$$\text{minimize } J(p), \quad (3.1)$$

Таким образом, в главе разрабатывается автоматизируемая методика калибровки кинематических параметров промышленного манипулятора и вспомогательного оборудования роботизированной ячейки, используемого в качестве внешних ограничений. Методика включает выбор кинематического представления, способ формирования набора конфигураций q_i , конкретный вид задачи (3.1), алгоритм ее решения и валидацию полученных результатов.

3.2. Метод калибровки без внешних измерительных устройств

В данном разделе предлагается практическая реализация идентификации кинематических параметров манипулятора с ограничениями в виде плоскостей, основанная на электрическом контакте инструмента с плоской проводящей поверхностью [11]. Предполагается, что

использование электрического контакта позволит автоматизировать процедуру и обеспечить высокую точность обнаружения контакта, сравнимую с достигнутой в [36], но при меньших затратах.

Опишем процедуру калибровки, использующую ограничения в виде плоскостей. Предполагается наличие одной или нескольких плоских твердых поверхностей в рабочей области манипулятора. В процессе калибровки манипулятор касается одной из поверхностей в нескольких точках, а система управления сохраняет информацию о конфигурациях манипулятора в моменты срабатывания электрического контакта с поверхностью. Оценки кинематических параметров могут быть получены из сохраненных данных с учетом того, что все точки контакта принадлежат одной плоскости. Если имеется несколько поверхностей, процесс повторяется для каждой из них, повышая точность получаемых оценок.

В общем случае калибровка с использованием плоскости позволяет найти оценки параметров лишь с точностью до неизвестного множителя. Эта неопределенность может быть устранена, если в точности известно значение одного из кинематических параметров. При отсутствии такой информации процедура измерений должна быть дополнена. Предлагается закрепить на некоторых из плоскостей токопроводящий элемент с двумя параллельными гранями так, чтобы одна из его граней лежала в плоскости, и дополнить данные измерениями, выполненными при контакте со второй гранью этого элемента. Если известно расстояние между гранями токопроводящего элемента, это позволяет однозначно определить кинематические параметры манипулятора.

Накопленные данные измерений используются для построения целевой функции, зависящей от оценок кинематических параметров и принимающей минимальное значение, когда оценки совпадают с фактическими параметрами манипулятора. Требуемые оценки находятся путем минимизации этой функции. Перейдем к подробному описанию процедуры калибровки.

Реализация процедуры калибровки

В соответствии с [11, 69] предлагаемая система калибровки кинематических параметров на основе внешних ограничений включает:

- манипулятор с установленным токопроводящим щупом;
- проводящую плоскую поверхность, при этом поверхность и токопроводящий щуп манипулятора интегрированы в систему так, что электрическая цепь замыкается при физическом контакте между поверхностью и щупом;
- датчик обнаружения электрического контакта, подключенный к токопроводящему щупу манипулятора и передающий сигнал в систему управления манипулятором.

Поскольку электрический сигнал формируется в момент механического контакта между токопроводящим щупом и поверхностью и не зависит от других факторов, предлагаемое решение гарантирует точность и стабильность входных данных.

На рисунке 3.1 представлены элементы предлагаемой системы калибровки, где 1 — манипулятор; 2 — звенья манипулятора; 3 — шарниры; 4 — токопроводящий щуп; 5 — токопроводящая плоская поверхность; 6 — токопроводящий элемент; 7 — базовая система координат; 8 — система координат, связанная с концом инструмента.

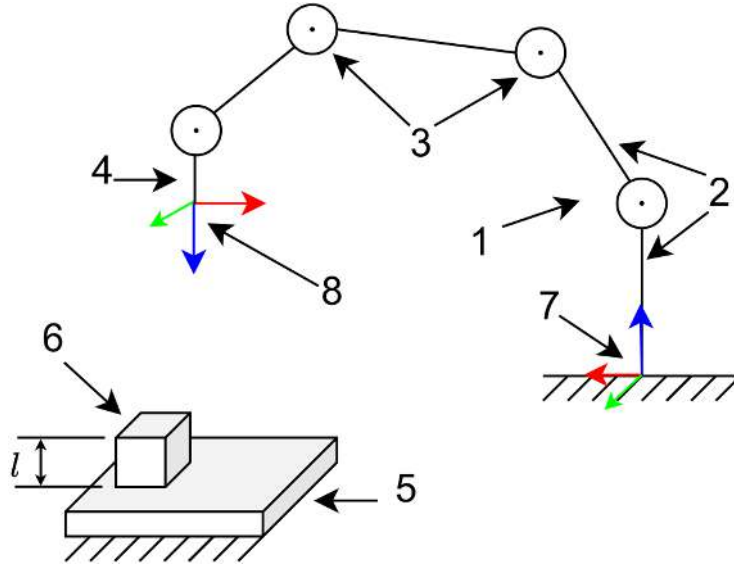


Рисунок 3.1 — Схема практической реализации предлагаемого метода калибровки

Процедура калибровки включает следующие шаги:

1. Токопроводящий щуп перемещается в направлении запланированной точки на проводящей поверхности 5.
2. В момент электрического контакта сигнал электрического контакта токопроводящего щупа 4 передается на датчик обнаружения электрического контакта, а затем в систему управления, что приводит к прерыванию движения манипулятора.
3. Конфигурация манипулятора 1 (q) в момент электрического контакта между щупом 4 и плоскостью 5 измеряется и сохраняется.
4. Первые три шага последовательно повторяются для всех запланированных точек.
5. Проводится процедура идентификации кинематических параметров на основе полученных измерений.

Задача оптимизации для оценки параметров

Пусть q_k^i — конфигурация манипулятора при i -м контакте с k -й плоскостью, $i = \overline{1, n_k}$, n_k — количество контактов с k -й плоскостью, $k = \overline{1, K}$, K — количество плоскостей. Через q_k^0 обозначим конфигурацию манипулятора, когда щуп касается токопроводящего элемента, расположенного на k -й плоскости, $k \in S$, где S — множество индексов тех плоскостей, для

которых измерения были выполнены с использованием токопроводящего элемента. Множество S пусто, если такие измерения не производились.

Согласно (2.1) вектор $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ координат конца щупа в системе координат базы робота в момент контакта с плоскостью или токопроводящим элементом может быть выражен следующим образом:

$$\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\text{proj}} \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}_k^i, \Phi) \bar{\mathbf{r}}, \quad (3.2)$$

где $\bar{\mathbf{r}} = [0, 0, 0, 1]^\top$, $\mathbf{P}_{\text{proj}} = [\mathbb{I}_3, \mathbb{O}_{3 \times 1}] \in \mathbb{R}^{3 \times 4}$ — матрица проекции, необходимая для выделения трехмерного вектора евклидовых координат из матрицы однородного преобразования, $\mathbb{I}_3$ — единичная матрица размерности 3. Используя (3.2), введем отображение:

$$f(\mathbf{q}, \Phi) = \mathbf{P}_{\text{proj}} \mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}, \Phi) \bar{\mathbf{r}}, \quad (3.3)$$

определяющее координаты конца щупа в системе координат базы робота по текущим кинематическим параметрам Φ и конфигурации манипулятора $\mathbf{q}$.

Информация о кинематических параметрах, накопленная в ходе процедуры калибровки, может быть выражена в виде двух систем уравнений

$$\langle \mathbf{a}_k, (f(\mathbf{q}_k^i, \Phi) - f(\mathbf{q}_k^j, \Phi)) \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n_k}, j = \overline{i+1, n_k}, k = \overline{1, K}, \quad (3.4)$$

$$\langle \mathbf{a}_k, (f(\mathbf{q}_k^i, \Phi) - f(\mathbf{q}_k^0, \Phi) + l \mathbf{a}_k) \rangle = 0, \quad i = \overline{1, n_k}, k \in S, \quad (3.5)$$

где $\mathbf{a}_k$ — вектор нормали k -й плоскости, l — расстояние между параллельными гранями токопроводящего элемента. Первая система уравнений показывает, что вектор, соединяющий любые две точки контакта щупа с плоскостью, ортогонален нормали плоскости. Вторая система выражает аналогичное условие в случае, когда одна из точек лежит на грани токопроводящего элемента. Предполагается, что конфигурации $\mathbf{q}_k^i$ и толщина токопроводящего элемента l известны с требуемой точностью.

Цель калибровки — уточнить оценки всех или части кинематических параметров манипулятора, если остальные параметры известны с требуемой точностью. Помимо кинематических параметров, уравнения включают векторы нормалей к плоскостям $\mathbf{a}_k$. Поскольку цель работы заключается в разработке метода калибровки, не использующего внешние измерительные устройства, предполагается, что эти векторы неизвестны с требуемой точностью и также требуют оценки. Таким образом, вектор неизвестных параметров $\mathbf{p}$, подлежащих оценке, состоит из неизвестных компонент вектора кинематических параметров Φ и координат векторов $\mathbf{a}_k$, $k = \overline{1, K}$.

Для решения системы (3.4), (3.5) преобразуем ее в задачу оптимизации. Введем целевую функцию $J(\mathbf{p})$ (3.1), представляющую собой сумму квадратов невязок:

$$J(\mathbf{p}) = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k-1} \sum_{j=i+1}^{n_k} \langle \mathbf{a}_k, (f(\mathbf{q}_k^i, \Phi) - f(\mathbf{q}_k^j, \Phi)) \rangle^2 + \\ + w \sum_{k \in S} \sum_{i=1}^{n_k} \langle \mathbf{a}_k, (f(\mathbf{q}_k^i, \Phi) - f(\mathbf{q}_k^0, \Phi) + l \mathbf{a}_k) \rangle^2, \quad (3.6)$$

где $w > 0$ — весовой коэффициент, выбор которого может влиять на точность получаемых оценок. Если измерения с использованием токопроводящего элемента не производились, множество S пусто и вторая сумма в (3.6) отсутствует. Рассматриваемая целевая функция, независимо от используемого представления кинематики, является нелинейной и невыпуклой относительно искомых оценок $\mathbf{p}$ и может иметь несколько локальных минимумов. Это, разумеется, существенно затрудняет поиск оценок. Однако задача упрощается тем, что приближенные значения оцениваемых параметров известны, и требуется лишь уточнить имеющиеся оценки. Будем считать, что известны границы возможных значений каждого из параметров, т. е. заданы векторы $\mathbf{p}_-$ и $\mathbf{p}_+$, такие, что неизвестный вектор $\mathbf{p}$ удовлетворяет неравенствам $\mathbf{p}_- \preceq \mathbf{p} \preceq \mathbf{p}_+$ (неравенства понимаются покомпонентно).

Таким образом, для идентификации кинематических параметров необходимо решить следующую задачу оптимизации:

$$\begin{aligned} & \text{minimize } J(\mathbf{p}) \\ & \text{s.t. } \mathbf{p}_- \preceq \mathbf{p} \preceq \mathbf{p}_+. \end{aligned} \tag{3.7}$$

В такой постановке задача идентификации параметров является нелинейной, невыпуклой и может иметь несколько локальных минимумов, независимо от используемого представления кинематики.

С другой стороны, при достаточно узких границах $\mathbf{p}_-$ и $\mathbf{p}_+$ можно считать, что целевая функция имеет единственный локальный минимум, что существенно расширяет класс применимых методов в отличие от методов [32, 34—37], где оптимизация применяется к явной линеаризации целевого функционала. Это обусловлено структурой расширенного функционала $J(\mathbf{p})$. Например, задачи динамической калибровки решались с помощью квазиньютоновских методов [138] и метода внутренней точки [27]. Кроме того, эти методы позволяют вычислять градиент и гессиан целевой функции в явном виде. В настоящей работе для решения задачи оценки параметров в виде задачи (3.7) также применялся метод внутренней точки.

3.3. Верификация алгоритма в моделировании

В настоящем разделе перейдем к реализации всех ранее описанных приемов и методов в моделировании. В частности, сосредоточимся на сравнительном анализе методов кинематической калибровки с использованием нелинейных кинематических уравнений в представлениях ДН, РОЕ и СРС. Сравнение проводится как для калибровки при помощи внешних высокоточных измерителей (измеряются положение и/или ориентация инструмента), так и для предлагаемой калибровки на основе внешних ограничений с применением средств оптимизации.

Калибровка при помощи внешних высокоточных измерителей с измерением только положения может быть сформулирована (по аналогии с задачей (2.54), раздел 2.5) в терминах

уравнений (3.3), (3.4), (3.6) как следующая задача оптимизации:

$$\begin{aligned} & \text{minimize} \quad \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} \|\mathbf{y}_k^i - f(\Phi, \mathbf{r}, \mathbf{q}_k^i)\|^2 \\ & \text{s.t.} \quad \mathbf{p}_- \preceq \mathbf{p} \preceq \mathbf{p}_+, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где $\mathbf{y}_k^i$ — измеренное положение системы координат, связанной с концом инструмента, в глобальной системе координат.

Для проведения строгого модельного эксперимента необходимо задать эталонную модель, которая служит основой для сравнения и валидации исследуемых алгоритмов. Такая модель описывает манипулятор с известными номинальными и фактическими кинематическими параметрами. Она может быть получена одним из двух способов: синтетически, путем прямого задания численных значений параметров, или на основе модели, ранее представленной в научной литературе.

Модель манипулятора Puma 560, тщательно описанная в работе [97], широко используется во множестве работ [2, 8, 19, 98, 101] в качестве эталона для алгоритмов калибровки. Кроме того, кинематика Puma 560 идентична по структуре кинематике ABB IRB 1600, рассматриваемому в далее. Поэтому для тестирования эффективности разрабатываемых алгоритмов и методов в качестве эталонной используется модель из работы [97].

Таким образом, в качестве объекта исследования используется шестизвенная модель манипулятора Puma 560 (имеющая структуру, аналогичную манипулятору ABB IRB 1600, рассматриваемому в следующем разделе), схематическое представление которой показано на рисунке 3.2.

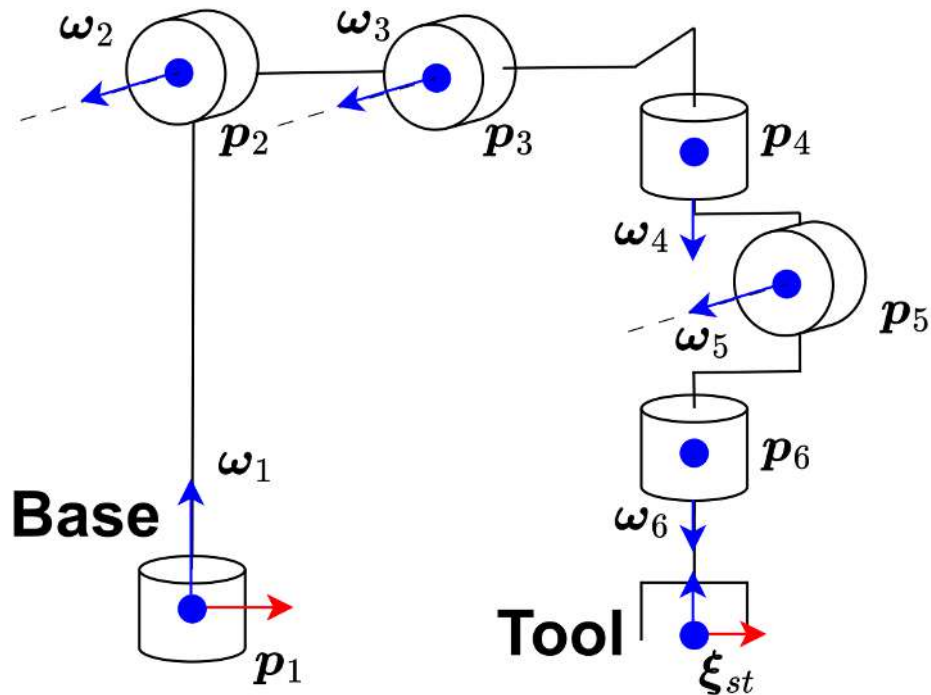


Рисунок 3.2 — Схематическое представление манипулятора Puma 560

Номинальные и фактические параметры POE [97] в форме POE-tool представлены в таблице 11, где $\xi_i = [\omega_i^\top \ v_i^\top]^\top$, $v_i = p_i \times \omega_i$ при $i = \overline{1,6}$, а ξ_{st} соответствует произвольному расположению системы координат инструмента в абсолютной системе координат в форме POE.

Таблица 11 — Номинальные и фактические POE параметры манипулятора Puma 560 [97]

	Номинальные						Фактические					
	ω			v			ω			v		
ξ_1	0	0	1	0	0	0	0.04	-0.02	0.999	0.02	0.04	0
ξ_2	0	-1	0	0	0	0	0.0	-1.0000	0	-0.02	0	0.05
ξ_3	0	-1	0	0	0	-100	0.178	-0.984	-0.001	-0.07	0.009	-101
ξ_4	0	0	-1	-50	250	0	0.062	0.013	-0.998	-51	249	0.0752
ξ_5	0	-1	0	-20	0	-250	0.001	-1.0000	0	-20.6	-0.0206	-249
ξ_6	0	0	-1	-50	250	0	0.095	0.031	-0.995	-51	249	0
ξ_{st}	0	0	0	250	50	-20	0.02	-0.01	0.01	249	51	-20.6

Поскольку модель изначально была описана в параметрах POE [97], для корректного сравнения с моделью необходимо рассмотреть кинематические параметры робота Puma 560 в представлениях ДН и СРС. Преобразование параметров выполнялось с использованием материала, представленного в разделе 2.3. Средняя величина ошибки для номинальных параметров модели составила 32,65 мм.

Процесс идентификации выполнялся в соответствии со следующим алгоритмом:

1. генерация точек, принадлежащих заданной плоскости (как показано на рис. 3.3);
2. решение обратной задачи кинематики;
3. внесение искажений в данные шумом из равномерного распределения (опционально);
4. идентификация параметров;
5. валидация параметров путем генерации нового набора конфигураций манипулятора.

Важно отметить, что выбор оптимальных конфигураций является отдельной нетривиальной задачей [24, 135, 139–143], которая может существенно повлиять на качество калибровки. Таким образом, для простоты было решено сгенерировать значительное количество (в 5–6 раз больше числа идентифицируемых параметров) допустимых точек на плоскостях из равномерного распределения.

При генерации конфигураций манипулятора, которые далее использовались в качестве входных параметров процесса идентификации, в рабочей области Puma 560 были заданы плоскости с фактическими нормальными n_i и точками m_i , представленные на рисунке 3.3 при $i = \overline{1,5}$:

$$\begin{aligned}
 &— n_1 = [0 \ 0 \ 1]^\top, m_1 = [0 \ 0 \ 0]^\top; \\
 &— n_2 = [0 \ 0 \ 1]^\top, m_2 = [0 \ 0 \ 50]^\top; \\
 &— n_3 = [0 \ 0 \ 1]^\top, m_3 = [0 \ 0 \ -50]^\top; \\
 &— n_4 = [0 \ 0.7071 \ 0.7071]^\top, m_4 = [0 \ 0 \ 0]^\top; \\
 &— n_5 = [0 \ -0.7071 \ 0.7071]^\top, m_5 = [0 \ 0 \ 0]^\top.
 \end{aligned}$$

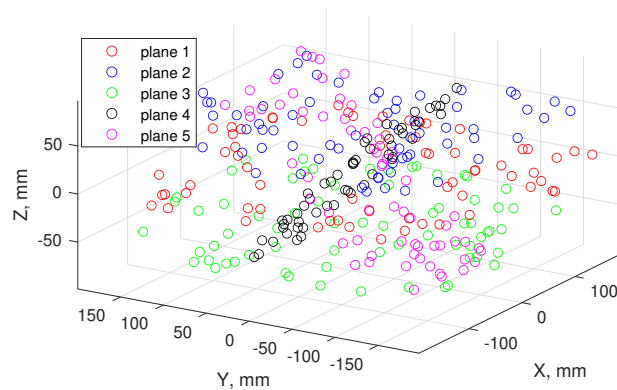


Рисунок 3.3 — Положения конца инструмента манипулятора, равномерно распределенные на калибровочных плоскостях

Номинальные параметры были сформированы путем добавления к фактическим параметрам равномерно распределенного шума ($[-0,2,0,2]$ рад для нормалей плоскостей, $[-5,5]$ мм для точек, задающих плоскости). Для проверки робастности данные измерений были искажены добавлением равномерно распределенного шума. Диапазон шума составлял $[-0,1,0,1]$ мм для каждой компоненты положения и $[-0,001,0,001]$ рад для компонент ориентации системы координат, связанной с концом инструмента.

Результаты моделирования приведены в таблице 12, где представлены усредненные по 200 случайным допустимым конфигурациям ошибки положения ТСР для калибровки с помощью внешних высокоточных измерителей, для предлагаемой калибровки на основе внешних ограничений, а также ошибка номинальной модели $\Delta d = 32,65$ мм. Нелинейная процедура оптимизации выполнялась методом внутренней точки при следующих настройках решателя: максимальное число вычислений функции — 10^4 , максимальное число итераций — 10^4 , допуск по шагу — 10^{-12} , допуск по оптимальности — 10^{-12} .

Таблица 12 — Усредненная ошибка положения для PUMA 560, верифицированная на 200 конфигурациях

Модель	Тип калибровки	
	внешние измерители, мм	внешние ограничения, мм
DN	20.67	528.19
POE	0.01	5.37
POE с шумом ¹	0.03	7.97
CPC	0.18	8.11

Следует отметить, что целевая функция в (3.6) сложнее, чем в (3.8), поскольку основана на скалярном произведении с оцениваемыми нормальными плоскостями.

¹равномерно распределенный шум $[-0,1,0,1]$ мм для положения и $[-0,001,0,001]$ рад для ориентации

Возможность возникновения вычислительных проблем при использовании данного подхода отмечалась в работе [31]. Целевая функция в работе [36] является более простой, поскольку параметры плоскостей были известны точно благодаря специфической экспериментальной установке.

Кроме того, в ряде работ [1, 19, 97, 98, 101] (а также ранее, в примере на рисунке 2.3 и в таблице 2) было показано, что для представления ДН в случае последовательных номинально параллельных шарниров разрыв в кинематических параметрах (параметрическая сингулярность) приводит к разрывам в задачах оптимизации (3.7), (3.8). Этот факт оказывает *существенное влияние* на сходимость градиентных методов оптимизации, как видно из таблицы 12. Кроме того, ограничения в виде интервалов параметров в данном случае также увеличивают невязки.

Таким образом, можно утверждать, что модель РОЕ действительно является наиболее подходящей для конкретной процедуры идентификации (3.7), поскольку превосходит модели ДН и СРС по всем пунктам сравнения (табл. 12). Модель СРС продемонстрировала более высокую точность по сравнению с представлением ДН благодаря свойству *параметрической непрерывности* (которым обладают РОЕ и СРС).

3.4. Калибровка промышленного манипулятора на примере ABB IRB 1600

В настоящем разделе излагается методология эксперимента и обсуждение полученных результатов. Методология проведения экспериментов несколько отличается от представленных ранее модельных экспериментов: 1) значения координат шарниров измеряются — нет необходимости в вычислениях обратной кинематики; 2) оценка качества процесса идентификации становится нетривиальной, поскольку отсутствуют внешние измерительные устройства и фактическая модель манипулятора неизвестна.

Таким образом, схема проведения калибровочного эксперимента выглядит так:

- выбор желаемых положений плоскостей и конфигураций манипулятора;
- процедура сбора данных;
- идентификация параметров системы;
- реализация полученных кинематических параметров на реальном манипуляторе;
- валидация параметров.

Кинематическая модель экспериментальной установки

Кинематика манипулятора описывается с помощью РОЕ модели, показавшей существенно лучшие результаты. Экспериментальная установка включала манипулятор ABB IRB 1600 (10/1.45)

и робот-позиционер ABB IRBP A-500/1450 модификации с диском, имеющим диаметр 700 мм и грузоподъемностью 500 кг, показанные на рисунке 3.4.

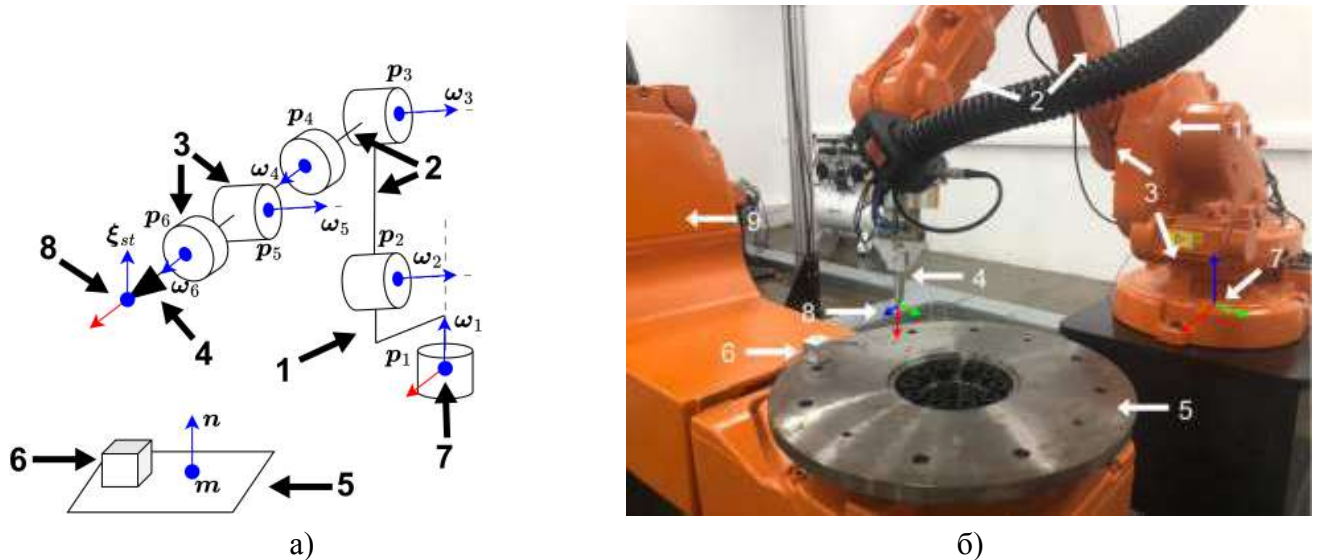


Рисунок 3.4 — Экспериментальная установка, включающая манипулятор ABB IRB 1600 и робот-позиционер ABB IRBP A-500/1450: а) схема с РОЕ параметрами; б) фото

Здесь используется та же нумерация, что и на рисунке 3.1: 1 — манипулятор ABB IRB 1600; 2 — звенья манипулятора; 3 — шарниры; 4 — токопроводящий щуп; 5 — токопроводящая плоская поверхность ABB IRBP A-500/1450; 6 — токопроводящий элемент; 7 — система координат базы робота; 8 — система координат, связанная с концом инструмента; 9 — робот-позиционер ABB IRBP A-500/1450.

Номинальная модель была составлена на основе описания из технической документации ABB IRB 1600/1660 (аналогично Puma 560 на рисунке 3.2). Таким образом, ее кинематическое представление в координатах РОЕ описывается следующими параметрами (таблица 13).

Таблица 13 — Номинальные параметры РОЕ манипулятора ABB IRB 1600

	ω			v		
ξ_1	0	0	1	0	0	0
ξ_2	0	1	0	-486.5	0	150
ξ_3	0	1	0	-1186.5	0	150
ξ_4	1	0	0	0	1186.5	0
ξ_5	0	1	0	-1186.5	0	750
ξ_6	1	0	0	0	1186.5	0
ξ_{st}	0	0	0	1105	0	1186.5

Здесь $\xi_i = [\omega_i^\top \ v_i^\top]^\top$, $v_i = p_i \times \omega_i$ при $i = \overline{1,6}$, а ξ_{st} соответствует расположению системы координат, связанной с инструментом, в координатах РОЕ. Корректность полученной модели была проверена в RobotStudio и по ДН-модели, указанной в источниках ABB.

Следующим шагом является получение экспериментальных данных от робота ABB IRB 1600, включающих конфигурации манипулятора для каждой точки контакта с плоскостью. Обнаружение контакта в каждой точке осуществлялось с помощью системы «токопроводящий щуп — токопроводящая плоскость», описанной ранее в разделе 3.2. В силу особенностей экспериментальной установки (рисунок 3.4, б) положения точек контакта на плоскости фиксированы; единственной варьируемой величиной является угол наклона плоскости позиционера (позиция 9 на рисунке 3.4).

3.4.1. Эксперимент

Для автоматизации процедуры сбора был выбран паттерн из концентрических окружностей с радиусами от 110 до 150 мм с шагом 10 мм (5 окружностей), по 16 точек на каждой. Такая конфигурация позволила избежать попадания точек в отверстия плиты позиционера, показанные на рисунке 3.4, б с учетом особенностей калибровочной поверхности.

Выбор угла наклона поверхности напрямую влияет на число обусловленности параметрического якобиана (линеаризации исходной задачи (3.7)); сам якобиан на первом шаге был получен процедурой автоматического дифференцирования.

Для нахождения углов, обеспечивающих наилучшую обусловленность модели, применялся генетический алгоритм, в котором в качестве целевой функции использовался индекс O_1 [17]. В результате оптимизации были получены следующие значения: $-44,4271^\circ$, -45° и $-53,222^\circ$. Поскольку окрестность угла -45° характеризуется особенно высокой обусловленностью параметрического якобиана, набор экспериментальных углов был дополнен значениями -65° , -25° , 0° и 25° для расширения вариативности данных. Для каждого из перечисленных углов были собраны экспериментальные данные с манипулятора ABB IRB 1600, представляющие собой конфигурации (показания энкодеров всех шести шарниров) в моменты контакта щупа с каждой точкой паттерна.

Для оценки параметров на основе полученных экспериментальных данных, аналогично предыдущему разделу, была сформулирована и решена нелинейная задача оптимизации методами глобальной оптимизации с теми же настройками решателя. Рассматривались два варианта границ параметров для достижения компромисса между сходимостью численных методов и точностью идентифицированных параметров:

1. $\omega_a^i - \omega_n^i \in [-0,2, 0,2]$ рад, $v_a^i - v_n^i \in [-5, 5]$ мм, $n_a^i - n_n^i \in [-0,2, 0,2]$ рад, $m_a^i - m_n^i \in [-30, 30]$ мм, $i = \overline{1,3}$.
2. $\omega_a^i - \omega_n^i \in [-0,3, 0,3]$ рад, $v_a^i - v_n^i \in [-5, 5]$ мм, $n_a^i - n_n^i \in [-0,3, 0,3]$ рад, $m_a^i - m_n^i \in [-50, 50]$ мм, $i = \overline{1,3}$.

Здесь $\xi_a = [\omega_a^T, v_a^T]^T$ — фактические координаты РОЕ, $\xi_n = [\omega_n^T, v_n^T]^T$ — номинальные координаты РОЕ для одного шарнира, ω^i — i -я компонента ω , v^i — i -я компонента v , n_a и m_a — фактические параметры плоскости (нормаль и точка), n_n и m_n — номинальные параметры одной плоскости.

Результаты идентификации приведены в таблицах 14 и 15, где $\xi_i = \begin{bmatrix} \omega_i^\top & v_i^\top \end{bmatrix}^\top$, $v_i = p_i \times \omega_i$ — координаты РОЕ при $i = \overline{1,6}$, а ξ_{st} описывает положение и ориентацию системы координат, связанной с концом инструмента, в параметрах модели РОЕ.

Таблица 14 — Восстановленные параметры РОЕ для 1-го варианта ограничений

	ω			v		
ξ_1	0.0003	-0.0036	0.9999	-0.0003	-0.0001	-0.0002
ξ_2	0.00002	0.9999	0.0015	-486.4973	0.0004	150.0009
ξ_3	0.0001	0.9999	-0.0000	-1186.4989	-0.0003	150.0031
ξ_4	0.9999	0.0000	-0.0008	0.0002	1186.5000	-0.0003
ξ_5	-0.0001	0.9999	-0.0007	-1186.5026	0.0002	749.9960
ξ_6	0.9999	0.0000	-0.0004	-0.0006	1186.5007	0.0005
ξ_{st}	0.0000	0.0016	0.0027	1105.0007	0.00027	1186.5002

Таблица 15 — Восстановленные параметры РОЕ для 2-го варианта ограничений

	ω			v		
ξ_1	0.0002	-0.0006	0.9999	-0.0073	0.0045	-0.0161
ξ_2	-0.0064	0.9999	-0.0046	-486.4863	0.0099	149.9989
ξ_3	-0.0013	0.9999	-0.0009	-1186.5008	0.0084	150.0332
ξ_4	0.9999	0.0000	-0.0032	0.0197	1186.5016	-0.0042
ξ_5	-0.0062	0.9998	-0.0154	-1186.5072	-0.0017	749.8694
ξ_6	0.9999	0.0000	0.0006	-0.0096	1186.4992	0.0071
ξ_{st}	-0.0178	0.0025	0.0027	1105.0004	0.0038	1186.5026

Валидация без внешних измерительных устройств

В отличие от работ [34–36, 116], положение и ориентация плоскостей в абсолютной системе координат неизвестны — их параметры также идентифицируются при решении (3.7). Для валидации применялись 100 конфигураций (для углов наклона позиционера $-44,4271^\circ$, -45° и $-53,222^\circ$), которые не использовались ранее при решении (3.7). Для каждой конфигурации манипулятора q_k^i рассчитывалось расстояние до соответствующей плоскости как для номинальных, так и для откалиброванных параметров. Результаты такой валидации приведены ниже на рисунке 3.5 и в таблице 16.

Таблица 16 — Расстояние до плоскостей, проверенное на 100 конфигурациях

Параметры	Сред., мм	Макс., мм	СКО, мм
номинальные	0.4271	1.1545	0.2032
восстановленные	0.1981	0.3322	0.0706

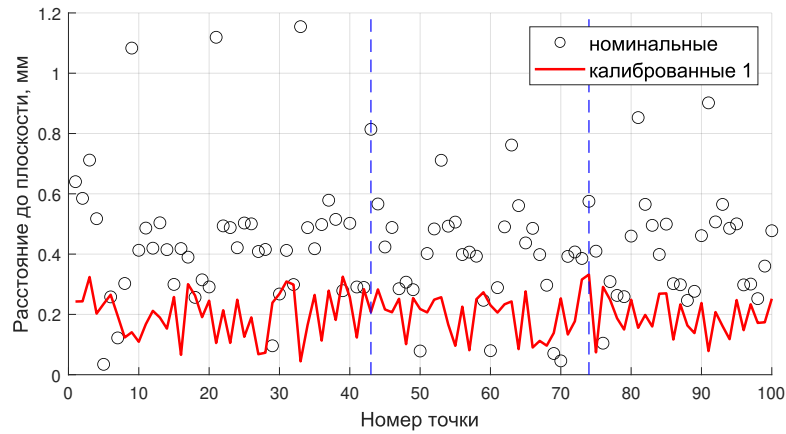


Рисунок 3.5 — Расстояния от точек до каждой из трех плоскостей: $-44,4271^\circ$, -45° и $-53,222^\circ$, разделенных синей штриховой линией, для номинальной модели (черные круглые маркеры) и калиброванной модели (красная сплошная линия).

Как можно заметить, восстановленные в результате калибровки параметры обеспечивают значительно меньшее отклонение точек контакта от плоскости по сравнению с номинальной моделью. Среднее расстояние сократилось с 0,4271 мм до 0,1981 мм, максимальное — с 1,1545 мм до 0,3322 мм, а среднеквадратическое отклонение уменьшилось почти в три раза (с 0,2032 мм до 0,0706 мм). Это подтверждает, что калиброванные параметры лучше соответствуют реальной геометрии манипулятора, обеспечивая более точное соблюдение плоских ограничений. Подобный подход позволяет провести валидацию результатов калибровки также без использования внешних измерителей, что является распространенной практикой (см. таблицу 1).

Валидация с помощью линейного внешнего измерителя

Однако у этого подхода есть недостаток — по существу, используемая метрика представляет собой несколько преобразованный функционал качества (3.6), который не полностью отражает абсолютную точность позиционирования. В таком случае применим принцип, схожий с применявшимся ранее при сборе данных:

В силу описанного выше алгоритма мы не можем применить обнаружение электрического контакта (как при *сборе данных*), поскольку точки контакта должны быть каким-либо образом помечены для измерения расстояний между ними после эксперимента. Поэтому было решено использовать датчик силы ABB Integrated Force Control Sensor 165 для обнаружения контакта при *валидации*.

Случайным образом выбираются точки над плоскостью, после чего выполняется автоматическое опускание к плоскости до срабатывания датчика силы. При выбранном пороге силы 1 Н точки отмечаются на непроводящем материале плоскости; затем измеряются расстояния d_k^{ij} между ними и соответствующие конфигурации манипулятора q_k^i, q_k^j .

Алгоритм 3.1 Процедура валидации калиброванных кинематических параметров

- 1: Разместить некоторым образом определенное количество точек $i = \overline{1, n_k}$ на плоскости k , $k = \overline{1, K}$, и получить соответствующие конфигурации робота q_k^i ;
- 2: Вычислить расстояние между любыми двумя точками через преобразование прямой кинематики с калиброванными параметрами Φ_{cal} и полученными конфигурациями q_k^i с использованием (3.3) следующим образом:

$$\tilde{d}_{\text{cal},k}^{ij} = \|f(q_k^i, \Phi_{\text{cal}}) - f(q_k^j, \Phi_{\text{cal}})\|; \quad (3.9)$$

- 3: Измерить физически *фактическое* расстояние d_k^{ij} и оценить величину ошибки между *фактическим* расстоянием и полученным с помощью прямой кинематики $\tilde{d}_{\text{cal},k}^{ij}$ с калиброванными параметрами.
-

Полученные данные могут быть представлены в виде матриц смежности взвешенных графов для каждой k -й плоскости. А именно, представим данные в виде матриц смежности A_k и $\tilde{A}_{\text{cal},k}$ для *измеренных* расстояний и расстояний, *оцененных* с помощью (3.9) с *восстановленными* параметрами соответственно:

$$\begin{aligned} A_k, \text{ где } a_k^{ij} = d_k^{ij} \quad \forall i \neq j, \quad a_k^{ii} = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, n_k}, \\ \tilde{A}_k^{\text{cal}}, \text{ где } \tilde{a}_k^{ij} = \tilde{d}_{\text{cal},k}^{ij} \quad \forall i \neq j, \quad \tilde{a}_k^{ii} = 0, \quad k = \overline{1, K}, \quad i = \overline{1, n_k}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Тогда для оценки относительной точности калибровки введем *векторы разностей матриц смежности* Δ_k^{cal} для A_k , $\tilde{A}_k^{\text{cal}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$:

$$\Delta_k^{\text{cal}} = \text{vec} \left(\tilde{A}_k^{\text{cal}} - A_k \right) \in \mathbb{R}^{n(n-1)/2}, \quad k = \overline{1, K}, \quad (3.11)$$

где $\text{vec}(B)$ — оператор векторизации для элементов B , лежащих выше главной диагонали.

Ниже на рисунке 3.6 схематично проиллюстрирована предлагаемая методика и пример расчета вектора разностей матриц смежности (3.12).

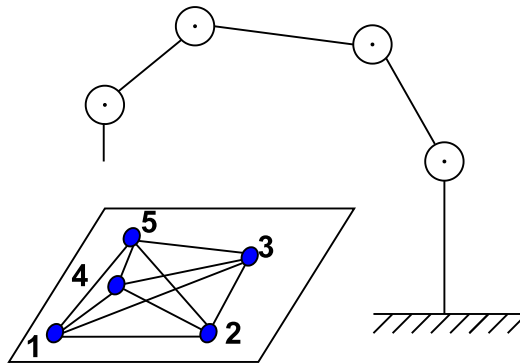


Рисунок 3.6 — Схематичный пример методики валидации

$$\tilde{\mathbf{A}}_k^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0 & 214.01 & 280.95 & 143.02 & 225.08 \\ * & 0 & 185.03 & 202.96 & 220.94 \\ * & * & 0 & 189.11 & 183.97 \\ * & * & * & 0 & 96.49 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} 0 & 214.0 & 281 & 143.0 & 225.0 \\ * & 0 & 185 & 203 & 221 \\ * & * & 0 & 189.1 & 183.9 \\ * & * & * & 0 & 96.5 \\ * & * & * & * & 0 \end{bmatrix}, \quad (3.12)$$

$$\Delta_k^{\text{cal}} = \begin{bmatrix} 0.01 & -0.05 & 0.03 & 0.02 & -0.04 & 0.01 & 0.08 & -0.06 & 0.07 & -0.01 \end{bmatrix}^T.$$

Следует отметить, что существует возможность получить соответствующие матрицы разностей смежности на основе кинематических параметров, содержащихся в программном обеспечении манипулятора ABB IRB 1600. Эти параметры были откалиброваны с помощью лазерного трекера Leica AT901B — *заводские* параметры. Таким образом, было выполнено сравнение четырех наборов: *номинальные* параметры, два варианта *калиброванных* параметров (таблицы 14 и 15 соответственно) и *заводские* параметры.

Эксперименты, показанные на рисунке 3.6, были многократно проведены при $n_k = 9$ для каждой плоскости $k \in \{25^\circ, 0^\circ, -25^\circ, -45^\circ, -65^\circ, -90^\circ, \text{вне } 1, \text{вне } 2\}$, $K = 8$, согласно (3.10), (3.11), на установке, представленной на рисунке 3.4. Здесь *вне 1* и *вне 2* — два набора измерений, расположенных вне рабочего пространства. Доверительные интервалы для каждого набора *векторов разностей матриц смежности* Δ_k^j при $j \in \{\text{номинальные, восстановленные 1, восстановленные 2, заводские}\}$ (квантиль уровня $\alpha = 0,95$) представлены в таблице 17, где φ — угол наклона плоскости в градусах.

Таблица 17 — Доверительные интервалы для векторов разностей матриц смежности Δ_k^j (в мм)

$\varphi, ^\circ$	Номинальные	Калиброванные 1	Калиброванные 2	Заводские
-25	-0.1345 ± 0.506	-0.0638 ± 0.4025	1.2456 ± 3.0869	0.0588 ± 0.4254
-45	0.2625 ± 0.6040	0.1629 ± 0.3657	-1.7218 ± 2.0527	-0.0892 ± 0.3044
-65	0.2255 ± 0.4246	0.1200 ± 0.3021	-0.2815 ± 0.9248	0.0981 ± 0.3053
-90	0.1127 ± 0.3625	0.0175 ± 0.3557	-0.2351 ± 0.5672	0.0972 ± 0.3380
0	-0.1797 ± 0.3538	-0.2299 ± 0.4074	-0.0858 ± 0.5534	-0.2088 ± 0.3964
25	0.0235 ± 0.3578	-0.0379 ± 0.3526	-0.0741 ± 0.3900	0.0548 ± 0.3654
<i>вне 1</i>	-0.0452 ± 0.2885	-0.1038 ± 0.3629	-0.0061 ± 0.3397	-0.0208 ± 0.2774
<i>вне 2</i>	0.0798 ± 0.2501	0.0164 ± 0.2731	0.1148 ± 0.4024	0.0977 ± 0.2742

Как видно из таблицы 17, первый набор *восстановленных* кинематических параметров описывает кинематику манипулятора **лучше**, чем номинальные параметры. Более того, в некоторой области рабочего пространства первый набор восстановленных параметров оказался точнее параметров, откалиброванных ранее с помощью лазерного трекера Leica AT901B (максимальная погрешность 10 мкм/м).

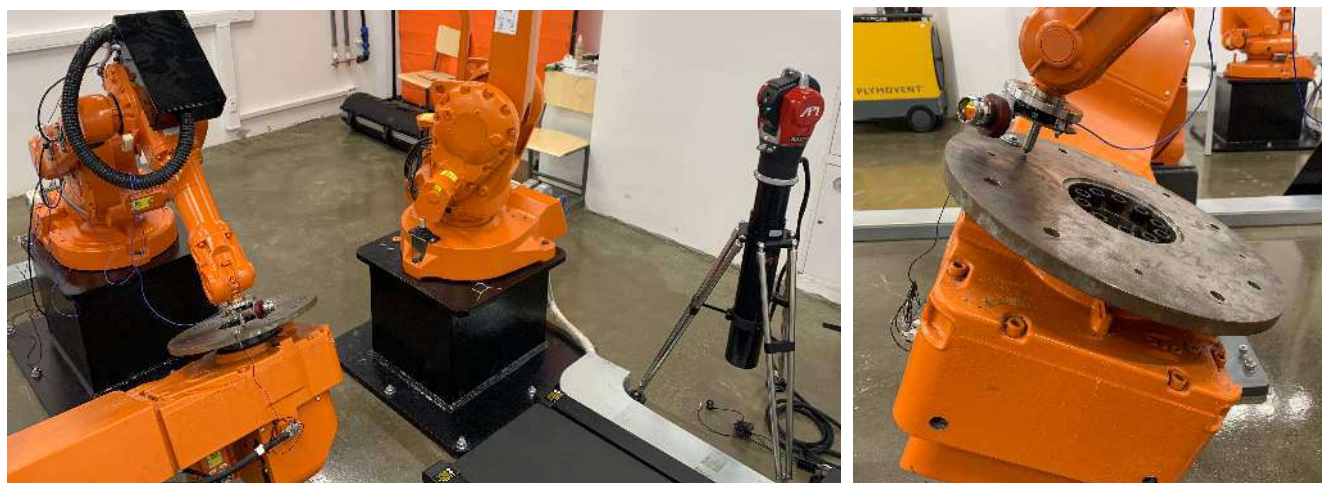
Недостаток такого метода заключается, во-первых, в необходимости физически фиксировать точку контакта, затем измерять расстояние с помощью дополнительного прибора. По этой причине для регистрации контакта использовался иной принцип — срабатывание датчика Force Control Sensor 165 при пороге силы 1 Н. Во-вторых, цена деления используемого

штангенциркуля составляла 0,1 мм, что в совокупности со способом определения момента и точки контакта приводило к достаточно широким доверительным интервалам (таблица 17).

Валидация с помощью высокоточного внешнего измерителя

В следующей версии эксперимента было уделено более пристальное внимание процедуре выбора оптимальных углов наклона плоскости робота-позиционера (рисунок 3.4). По аналогии с ранее проведенным экспериментом, было выбрано 5 коцентрических окружностей, на которых равномерно распределены 15 точек. Технически, точки на плоскости можно размещать произвольным образом, однако на производстве наличие такого паттерна более оправдано — меньшее время на поиск конфигураций, проще визуальная инспекция результатов, возможность полной автоматизации.

Следующее важное отличие от ранее проведенной валидации заключается в том, что расстояния между различными точками контакта предлагается измерять с помощью лазерного трекера. Это потребовало внесения некоторых изменений в экспериментальное оборудование — крепление отражателя лазерного трекера к инструменту, установка самого лазерного трекера, что показано на рисунке 3.7.



а)

б)

Рисунок 3.7 — Экспериментальная установка, включающая манипулятор ABB IRB 1600, робот-позиционер ABB IRBP A-500/1450 и лазерный трекер API Radian EMSD3: а) общий вид; б) способ крепления отражателя к инструменту

Далее, в соответствии с предлагаемым методом был проведен эксперимент, в ходе которого собирались не только конфигурации манипулятора q_k^i , но и положение отражателя в абсолютной системе координат, а также положение инструмента манипулятора на основе заводских параметров манипулятора. На рисунке 3.8 приведены экспериментальные данные:

точки контакта инструмента с поверхностью (синие круглые маркеры), векторы $(f_k^i - f_k^j)$ (синие линии), точки контакта инструмента с токопроводящим элементом (элемент 6 на рисунке 3.4), которые отмечены красными круглыми маркерами.

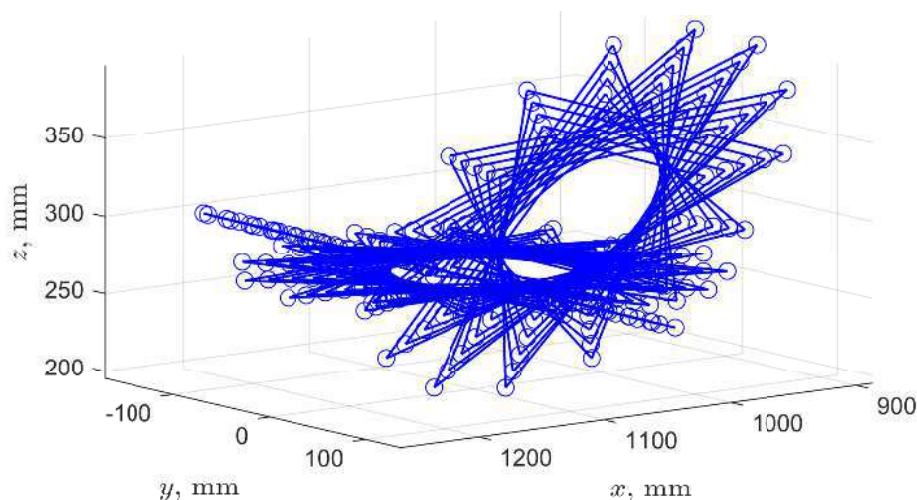


Рисунок 3.8 — Положения конца инструмента манипулятора при контакте с плоскостями (синие круглые маркеры) и при контакте с токопроводящим элементом (красные круглые маркеры), полученные с помощью номинальной модели

Была проведена процедура валидации для параметров: номинальных, калиброванных 1 (таблица 14), калиброванных 2 (таблица 15) и заводских — в соответствии с процедурой, описанной в алгоритме 3.1, где фактическое расстояние (обозначенное в алгоритме как d_k^{ij}) измерялось лазерным трекером API Radian EMSD3 для каждой из 75 точек для каждой плоскости.

Таблица 18 — Доверительные интервалы для векторов разностей матриц смежности Δ_k^j (в мм)

$\varphi, ^\circ$	Номинальные	Калиброванные 1	Калиброванные 2	Заводские
-41	-0.0343 ± 0.0084	0.0115 ± 0.0086	0.1024 ± 0.0120	-0.0569 ± 0.0087
0	-0.1430 ± 0.0087	-0.0988 ± 0.0098	-0.2117 ± 0.1054	-0.0800 ± 0.0090
17	-0.0735 ± 0.0020	-0.0749 ± 0.0014	-0.6281 ± 0.1165	-0.0148 ± 0.0002

Как можно заметить из таблицы 18, использование высокоточного внешнего измерителя позволило существенно снизить дисперсию полученных результатов и, как следствие, ширину доверительных интервалов. Первый набор калиброванных параметров характеризуется более узкими и устойчивыми доверительными интервалами по сравнению со вторым набором. Более того, даже для одного из исследованных углов наклона плоскости первый набор калиброванных параметров обеспечивает точность, превышающую точность калибровки, полученной с использованием высокоточного внешнего измерителя.

ГЛАВА 4. Частотный метод синтеза непрерывных скользящих режимов для динамических систем специального вида

В данном разделе предлагается теоретически обоснованная процедура выбора коэффициента усиления STA [72—74] и LCSMC [73] регуляторов, направленная на минимизацию параметров чаттеринга. Представленные результаты [72—74] расширяют теорию, развитую в [62, 67], со случая чистого интегратора на *общую FOPDT модель* — важное динамическое звено, широко используемое при синтезе регуляторов в промышленных приложениях [144]. Теоретические выкладки, основанные на методах НВ и DF, дополняются серией экспериментов на двигателях постоянного тока (ДПТ) и сопоставлением с базовыми примерами. Кроме того, демонстрируется, каким образом предложенная методология может быть применена к задаче управления приводом манипулятора ABB IRB 1600.

4.1. Предварительные сведения

Рассмотрим систему с одним входом и одним выходом (single-input single-output, SISO), относительный порядок выхода $y(t)$ которой относительно входа $u(t)$ равен единице:

$$\dot{y}(t) = u(t) + f(t), \quad (4.1)$$

где $f(t)$ — возмущение, удовлетворяющее условию Липшица почти всюду, т.е. $|\dot{f}(t)| \leq L$ при некотором известном $L > 0$. Предполагается также, что $y(t)$ и ее производная $\dot{y}(t)$ доступны для измерения.

LCSMC регулятор, построенный на основе релейного [40], имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} u(t) &= \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -k[\sigma_l(t)]^0, \end{aligned} \quad (4.2)$$

где $[\cdot]^p = |\cdot|^p \operatorname{sign}(\cdot)$. В качестве линейной переменной скольжения выбрана $\sigma_l(t) = \dot{y}(t) + \lambda(y(t) - r)$ при некотором $\lambda > 0$. Здесь r — уставка (задающий сигнал), причем r — константа; $y(t)$ — выход системы; $\dot{y}(t)$ — его производная; k — коэффициент усиления LCSMC. Введя обозначения $y_1 = y$ и $y_2 = \dot{y}$, запишем уравнения замкнутой системы (4.1), (4.2) в виде

$$\begin{aligned} \dot{y}_1(t) &= y_2, \\ \dot{y}_2(t) &= -k[\sigma_l(t)]^0 + \dot{f}(t). \end{aligned} \quad (4.3)$$

Алгоритм «Супер-Скручивания», также называемый в литературе *нелинейным ПИИ-регулятором*, был предложен А. Левантом [42]. Его уравнения имеют следующий вид [54]:

$$\begin{aligned} u(t) &= -k_1[\sigma_s(t)]^{1/2} + \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -k_2[\sigma_s(t)]^0, \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\sigma_s = r - y(t)$ — переменная скольжения, $k_1, k_2 > 0$ — положительные коэффициенты STA. Уравнения замкнутой системы (4.1), (4.4) имеют вид

$$\begin{aligned}\dot{\sigma}_s(t) &= -k_1[\sigma_s(t)]^{1/2} + \eta(t), \\ \dot{\eta}(t) &= -k_2[\sigma_s(t)]^0 + \dot{f}(t).\end{aligned}\quad (4.5)$$

При надлежащем выборе коэффициентов усиления k_1 и k_2 STA гарантирует идеальный скользящий режим второго порядка, обеспечивая асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (4.5). Первое доказательство устойчивости STA было представлено в работе [42] на основе анализа на фазовой плоскости. Впоследствии задача устойчивости нелинейного STA была переформулирована и доказано в линейной постановке [145], а также проанализирована с помощью однородной функции Ляпунова в [146]. Достаточные условия $k_2 > L$ и $k_1 > \sqrt{k_2 + L}$ были получены позже в [147], тогда как необходимые и достаточные условия для наихудших возмущений установлены в работах [148, 149].

4.2. Постановка задачи

Наличие немоделируемой динамики, например, динамики исполнительного механизма или его запаздывания (см., например, [67]), препятствует реализации идеального скользящего режима и истинной сходимости за конечное время, порождая вместо этого чаттеринг [53]. В предыдущих работах по LCSMC и STA [62, 67] методы DF и НВ использовались для оценки и последующей минимизации чаттеринга для специальных моделей исполнительных механизмов (запаздывание и критически демпфированного звена второго порядка) и объекта управления в виде интегратора. В свою очередь, FOPDT модель¹, задаваемая передаточной функцией вида

$$G(s) = \frac{p}{s + v} e^{-\tau s}, \quad (4.6)$$

где p — коэффициент усиления системы, v — полюс, а τ — время запаздывания, является одной из базовых моделей, используемых при проектировании промышленных систем управления. Данная модель представляет собой удобное для анализа приближение устойчивых динамических процессов, сохраняющее достаточную точность на практике [144, 151].

Таким образом, задача, рассматриваемая в настоящей работе, заключается в разработке конструктивной, практически применимой процедуры, которая: 1) идентифицирует параметры FOPDT по кривой разгона; 2) оценивает возможные характеристики чаттеринга (амплитуду, частоту и среднюю мощность) с помощью анализа замкнутой системы методами DF и НВ как для STA (4.4), так и для LCSMC (4.2); 3) настраивает коэффициенты усиления STA с целью минимизации уровня чаттеринга (по амплитуде или средней мощности) при обеспечении устойчивости замкнутой системы.

¹Линейный член v (4.6) видоизменяет уравнение (4.5), ослабляя классические условия устойчивости STA [148, 149]. Хотя данная структура отличается от обобщенного STA, представленного в работе [150], этот член оказывает стабилизирующее действие, гарантирующее равномерную ограниченность траекторий замкнутой системы в присутствии дополнительного полюса.

4.3. Методология

4.3.1. Метод на основе кривой разгона

Модель FOPDT (4.6) лежит в основе классических методологий настройки регуляторов, таких как методы Циглера–Никольса, Козна–Куна и метод 63 % и других для синтеза PI –, PII – и $PIID$ –регуляторов. Данные подходы объединяет общая основа в виде FOPDT модели; различие состоит в конкретном способе расчета параметров модели (4.6) (подробности см. в работе [151]²). Пример идентификации на основе кривой отклика для минимально-фазовой системы третьего порядка с доминирующим полюсом приведен на рисунке 4.1.

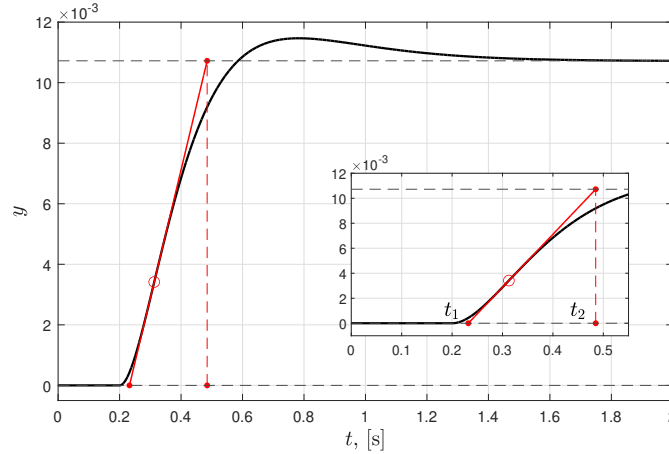


Рисунок 4.1 — Пример кривой отклика (сплошная черная линия) на ступенчатый сигнал при $R = 5,4 \cdot 10^{-3}$

Соответствующие параметры модели (4.6) вычисляются следующим образом:

$$p = \frac{y_{ss} - y_0}{r(t_2 - t_1)}, v = \frac{1}{t_2 - t_1}, \tau = t_1 - t_0, \quad (4.7)$$

где r — амплитуда ступенчатого входного сигнала, y_0 — начальное значение выхода системы в момент времени t_0 , а y_{ss} — значение выхода системы в установившемся режиме. Касательная максимального наклона (сплошная красная линия) построена в точке перегиба, которая обозначена незакрашенным красным кружком. Характеристическое время t_1 определяется как точка пересечения касательной с прямой y_0 , а t_2 соответствует пересечению касательной с прямой y_{ss} . В частности, для системы, представленной на рисунке 4.1, идентифицированные параметры равны: $p = 2$, $v = 0,258$, $\tau = 0,23$.

²Изначально в работе [151] методы настройки были представлены для системы вида $G(s) = p/(vs + 1)$.

Метод DF [56, 57, 152] используется для оценки характеристик возможных периодических колебаний — *чаттеринга* — путем представления переменной скользящего режима ($\sigma_s(t)$ или $\sigma_l(t)$) в виде ряда Фурье на основе следующих допущений.

Предположение 4.1 (Свойство фильтра нижних частот). Линейная часть (4.6) обладает свойствами фильтра нижних частот, ослабляющими высшие гармоники, т.е. $|G(j\omega)| \gg |G(jn\omega)|$ при $n \geq 2$.

Предположение 4.2 (Гармонический выход). Решение системы, замкнутой либо (4.6), (4.2), либо (4.6), (4.4), сходится к гармоническому поведению с амплитудой $A > 0$ и частотой $\omega > 0$:

$$y(t) \approx A \sin(\omega t), \quad \dot{y}(t) \approx A \omega \cos(\omega t).$$

В рамках принятых допущений уравнение гармонического баланса

$$N(A, \omega) G(j\omega) = -1, \quad (4.8)$$

отражает условие равенства амплитуд и компенсации фазовых сдвигов в замкнутом контуре: частотная характеристика линейной части $G(j\omega)$ должна совпадать с отрицательной обратной величиной описывающей функции $-1/N(A, \omega)$. Здесь $N(A, \omega)$ — результат гармонической линеаризации нелинейного элемента (в частности, регулятора, работающего в скользящем режиме, Рис. 4.2). В свою очередь, решение A_*, ω_* уравнения НВ (4.8) позволяет оценить *возможные* амплитуду и частоту чаттеринга соответственно.

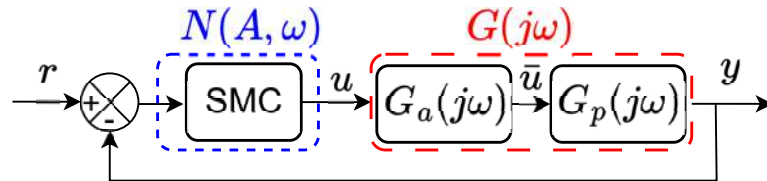


Рисунок 4.2 — Схема управления с регулятором на скользящем режиме (его DF) и динамикой «актуатор – объект управления»

Описывающая функция для LCSMC (4.2) получена в работе [62] путем анализа линейной переменной скользящего режима $\sigma_l(t) = \dot{y}(t) + \lambda(y(t) - r)$ в установившемся состоянии, т.е. $\sigma_l(t) = A \omega \cos(\omega t) + \lambda A \sin(\omega t)$, что дает

$$N_L(A, \omega) = \frac{\alpha k}{A \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \left(1 - j \frac{\lambda}{\omega} \right), \quad (4.9)$$

где $\alpha = \frac{2\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1.5)}$, а $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция.

Описывающая функция для STA (4.4) приведена в работе [53]

$$N_S(A, \omega) = \frac{\alpha_1 k_1}{A^{1/2}} - j \frac{\alpha_2 k_2}{\omega A}, \quad (4.10)$$

где $\alpha_1 = \frac{2\Gamma(1.25)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1.75)}$, $\alpha_2 = \frac{2\Gamma(1)}{\sqrt{\pi}\Gamma(1.5)}$.

Графическое представление отрицательной обратной величины DF, т.е. $-1/N(A, \omega)$ для случая LCSMC (4.9) и STA (4.10), необходимое для решения уравнения НВ (4.8), приведено на комплексной плоскости (Рис. 4.3). В частности, отрицательные обратные величины $-1/N(A, \omega)$

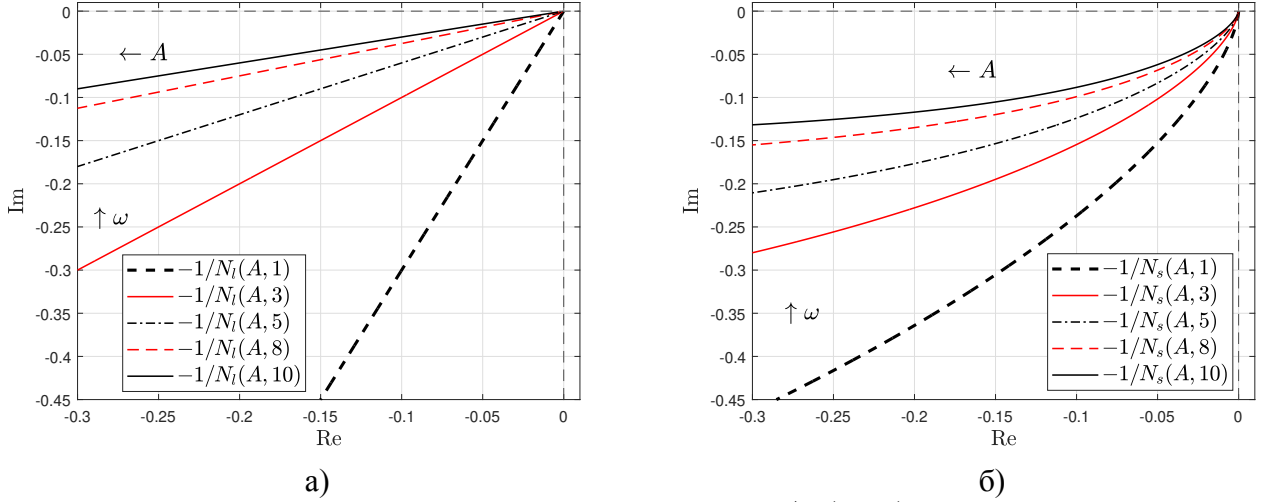


Рисунок 4.3 — Отрицательная обратная величина $-1/N(A, \omega)$ описывающих функций: а) LCSMC (4.9); б) STA (4.10)

вычислены для $\omega = \{1, 3, 5, 8, 10\}$, стрелки на Рис. 4.3 показывают, как именно меняются кривые $-1/N(A, \omega)$ с ростом A и ω .

4.3.2. Критерий Лоэба

Для анализа устойчивости предельных циклов с параметрами A_* и ω_* , определенными из уравнения НВ (4.8) в отсутствие внешнего воздействия ($f(t) \equiv 0$), применяется критерий Лоэба [153]. Данный критерий широко используется в сочетании с методами НВ и DF благодаря вычислительной простоте; его применимость продемонстрирована, в частности, в работах [53, 63, 65]. Устойчивость оценивается по значению величины:

$$\Phi = \left(\frac{\partial \text{Re}[W(A, \omega)]}{\partial A} \frac{\partial \text{Im}[W(A, \omega)]}{\partial \omega} - \frac{\partial \text{Re}[W(A, \omega)]}{\partial \omega} \frac{\partial \text{Im}[W(A, \omega)]}{\partial A} \right) \bigg|_{A_*, \omega_*}, \quad (4.11)$$

где $W(A, \omega) = N(A, \omega) + G^{-1}(j\omega)$. Условие устойчивости требует $\Phi > 0$, тогда как $\Phi < 0$ указывает на неустойчивость периодического решения.

Замечание 4.1. Хотя критерий Лоэба формально является необходимым условием устойчивости (см. модифицированную версию в работе [154]), не известно ни одного контрпримера, который бы нарушал его при использовании в качестве достаточного условия. Эта робастность объясняет его широкое распространение в качестве де-факто достаточного условия [65].

4.3.3. Средняя мощность

Для рассматриваемой модели FOPDT (4.6) мгновенная мощность $P(t)$, необходимая для поддержания колебаний, может быть выведена из соотношения пассивности³ как произведение входного и выходного сигналов $P(t) = u(t)y(t)$. В настоящей работе, следуя подходу, представленному в работе [67], мы используем *среднюю абсолютную мощность* в качестве практического показателя качества для анализа и настройки STA. Этот показатель, определяемый как

$$\bar{P} = \frac{1}{T} \int_0^T |P(t)| dt, \quad (4.12)$$

где $T = 2\pi/\omega$ — период колебаний, количественно оценивает полное управляющее воздействие, затрачиваемое за цикл. В отличие от средней мощности $\frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt$, которая стремится к нулю для симметричных колебаний (идеальный скользящий режим), $\bar{P}$ учитывает абсолютные энергетические затраты в режиме чаттеринга. Следовательно, она служит чувствительным и не обращающимся в нуль критерием для оценки и минимизации общей нагрузки привода в системах, управляемых SMC.

Утверждение 4.1. Для системы (4.6), замкнутой STA (4.4), выведено выражение для $\bar{P}$ имеет следующий вид

$$\bar{P} = \frac{A^2 \sqrt{\omega^2 + v^2}}{2\pi p} \left((2\angle G_p + \pi) \cos(\angle G_p) - 2 \sin(\angle G_p) \right), \quad (4.13)$$

где $\angle G_p = -\arctan(\omega/v)$.

Доказательство. Как упоминалось ранее, динамика «актуатор – объект управления» может быть разделена на динамику актуатора с запаздыванием $G_a(j\omega) = e^{-\tau j\omega}$ и номинальный объект управления $G_p(j\omega) = p/(j\omega + v)$, как это было показано ранее на рисунке 4.2. Благодаря соотношению пассивности мощность $P(t)$ может быть вычислена как произведение входного и выходного сигналов объекта $G_p(j\omega)$, входом которого является $\bar{u}(t)$ — выход актуатора $G_a(j\omega)$ (см. [155] Глава 6), а выход $y(t)$ аппроксимирован как $y \approx A \sin(\omega t)$. Тогда, используя гармоническую линеаризацию регулятора на скользящем режиме, то есть его DF $N(A, \omega)$, получаем

$$P(t) = \bar{u}(t) y(t) = -A^2 |N(A, \omega)| |G_a(j\omega)| \sin(\omega t) \sin(\omega t + \angle N(A, \omega) + \angle G_a(j\omega)). \quad (4.14)$$

где $\angle Z$ обозначает аргумент Z . Используя уравнение НВ (4.8) в форме $|N(A, \omega)| |G_a(j\omega)| |G_p(j\omega)| = 1$ и $\pi - \angle G_p(j\omega) - \angle G_a(j\omega) - \angle N(A, \omega) = 0$, мгновенную мощность (4.14) можно переписать (опуская A и ω)

$$P(t) = \frac{A^2 \sin(\omega t)}{|G_p|} \sin(\omega t - \angle G_p) = \frac{A^2}{2|G_p|} (\cos(\angle G_p) - \cos(2\omega t - \angle G_p)). \quad (4.15)$$

³Уравнение (4.6) является *строго пассивным* [155], что может быть показано с помощью тривиальной функции запаса $V = 0,5y^2$.

Тогда среднюю мощность $\bar{P}$ (4.12) за период $T = 2\pi/\omega$ можно вычислить в установившемся режиме следующим образом:

$$\bar{P} = \frac{A^2}{2T|G_p|} \int_0^T |\cos(\angle G_p) - \cos(2\omega t - \angle G_p)| dt. \quad (4.16)$$

Поскольку $\angle G_p \in [-\pi/2, 0]$ и $|G_p| = p/\sqrt{\omega^2 + v^2}$, уравнение (4.16) может быть упрощено до

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \frac{A^2}{T|G_p|} \left(\int_0^{t_1} (\cos(\angle G_p) - \cos(2\omega t - \angle G_p)) dt + \int_{t_1}^{\pi/\omega} (\cos(2\omega t - \angle G_p) - \cos(\angle G_p)) dt \right) = \\ &= \frac{A^2\omega}{2\pi|G_p|} \left(\frac{2\angle G_p + \pi}{\omega} \cos(\angle G_p) - \frac{2}{\omega} \sin(\angle G_p) \right) = \frac{A^2\sqrt{\omega^2 + v^2}}{2\pi p} ((2\angle G_p + \pi) \cos(\angle G_p) - 2 \sin(\angle G_p)), \end{aligned}$$

где $t_1 = (\angle G_p + \pi)/\omega$, $\angle G_p = -\text{atan}(\omega/v)$. □

Замечание 4.2. Если положить $p = 1$ и $v = 0$, уравнение (4.13) упрощается до результата работы [67] с точностью до множителя $\bar{P}_{\text{int}} = \frac{A^2\omega}{\pi}$.

4.4. Анализ чаттеринга в замкнутой системе

Для решения уравнения НВ сначала вычислим отрицательную обратную величину FOPDT модели (4.6), т.е. $-1/G(j\omega)$ (при $s = j\omega$), параметризованную p , v и τ :

$$-\frac{1}{G(j\omega)} = -\frac{1}{p} (v \cos(\omega\tau) - \omega \sin(\omega\tau)) - j\frac{1}{p} (\omega \cos(\omega\tau) + v \sin(\omega\tau)). \quad (4.17)$$

Тогда уравнение НВ (4.8) принимает вид

$$N(A, \omega) = -\frac{1}{G(j\omega)}, \quad (4.18)$$

где $-1/G(j\omega)$ задается (4.17), а $N(A, \omega)$ — DF регулятора на скользящем режиме, а именно LCSMC (4.2) или STA (4.4).

Тригонометрическое уравнение (4.18) имеет бесконечное множество решений из-за наличия запаздывания. Однако, поскольку используется методология DF с учетом только основной гармоники, а система обладает свойствами фильтра нижних частот (Допущения 4.1 и 4.2), разумно ввести следующую гипотезу, упрощающую дальнейший анализ.

Предположение 4.3. Для анализа НВ запаздывание в уравнении (4.6) может быть заменено аппроксимацией Паде первого порядка

$$G(s) = \frac{p}{s+v} e^{-\tau s} \approx \frac{p(2-\tau s)}{(s+v)(2+\tau s)} = \tilde{G}(j\omega). \quad (4.19)$$

Хотя аппроксимация Паде первого порядка не в точности эквивалентна рассмотрению первой гармоники ряда Фурье, она аппроксимирует основной эффект фазового сдвига

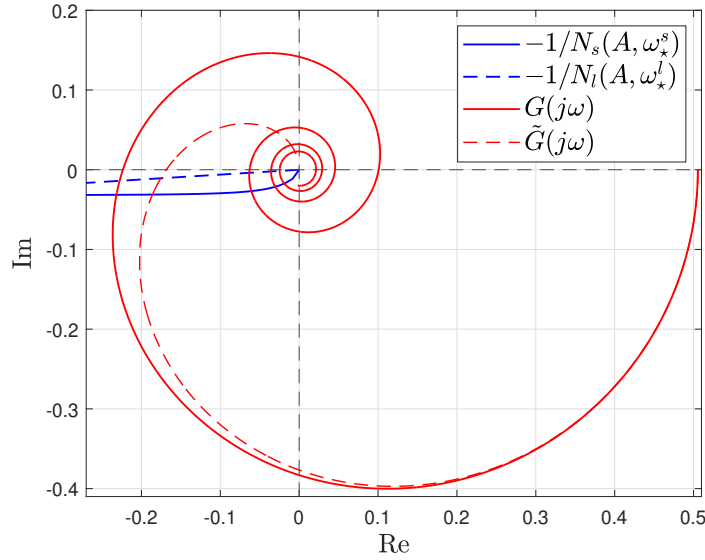


Рисунок 4.4 — Графическое решение уравнения НВ (4.8) для исходной системы $G(j\omega)$ (4.6) и с аппроксимацией Паде $\tilde{G}(j\omega)$ (4.19), замкнутой LCSMC (4.9) и STA (4.10) при $k = k_2 = 1,1L$, $k_1 = 2,1L$, $L = 2$, $\lambda = 3$ и параметрами (4.6), приведенными на Рис. 4.1)

запаздывания, подобно тому как первая гармоника захватывает доминирующее колебательное поведение в периодических сигналах.

Тогда, продолжая анализ с (4.19) вместо (4.6), сначала вычислим отрицательную обратную величину к $\tilde{G}(j\omega)$:

$$-\frac{1}{\tilde{G}(j\omega)} = \frac{(v\tau^2 + 4\tau)\omega^2 - 4v}{p(\tau^2\omega^2 + 4)} + j\omega \frac{\tau^2\omega^2 - 4(v\tau + 1)}{p(\tau^2\omega^2 + 4)}. \quad (4.20)$$

4.4.1. Анализ на основе уравнения гармонического баланса для непрерывного по Липшицу регулятора на скользящем режиме

Подставляя $-\frac{1}{\tilde{G}(j\omega)}$ (4.20) и LCSMC DF (4.9) в уравнение НВ (4.8), получим

$$\frac{4k}{\pi A \sqrt{\omega^2 + \lambda^2}} \left(1 - j \frac{\lambda}{\omega}\right) = \frac{(v\tau^2 + 4\tau)\omega^2 - 4v}{p(\tau^2\omega^2 + 4)} + j\omega \frac{\tau^2\omega^2 - 4(v\tau + 1)}{p(\tau^2\omega^2 + 4)}. \quad (4.21)$$

Утверждение 4.2. Амплитуда чаттеринга A_* для замкнутой системы (4.19), (4.2) может быть оценена следующим образом

$$A_* = \frac{p(\tau^2\omega_*^2 + 4)}{(v\tau^2 + 4\tau)\omega_*^2 - 4v} \cdot \frac{\alpha k}{\sqrt{\omega_*^2 + \lambda^2}}, \quad (4.22)$$

где оценка частоты чаттеринга ω_* задается выражением

$$\omega_* = \frac{-a_1 + \sqrt{a_1^2 - 4a_2a_0}}{2a_2}, \quad (4.23)$$

при $a_2 = \tau^2$, $a_1 = \lambda(v\tau^2 + 4\tau) - 4(v\tau + 1)$ и $a_0 = -4\lambda v$. Соответствующая средняя мощность имеет следующую оценку

$$\bar{P}_* = \frac{A_*^2 \sqrt{\omega_*^2 + v^2}}{2\pi p} [(2\angle G_p + \pi) \cos(\angle G_p) - 2 \sin(\angle G_p)], \quad (4.24)$$

где $\angle G_p = -\text{atan}(\omega_*/v)$.

Доказательство. Разделив действительную часть уравнения НВ (4.21) на его мнимую часть, решение ω_* для (4.21) может быть найдено как положительный корень квадратного уравнения относительно ω^2 :

$$a_2 \omega^4 + a_1 \omega^2 + a_0 = 0, \quad (4.25)$$

где $a_2 = \tau^2$, $a_1 = (\lambda(v\tau^2 + 4\tau) - 4(v\tau + 1))$ и $a_0 = -4\lambda v$. Следовательно, два возможных корня равны $\omega_{1,2}^2 = \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_2 a_0}}{2a_2}$. Поскольку дискриминант строго положителен, а $a_2 > 0$ и $a_0 < 0$, больший корень ω_* — соответствующий решению НВ (см. Рис. 4.4) — положителен. Тогда, выразив амплитуду A из действительной части уравнения (4.21), получим оценку на амплитуду чаттеринга (4.22). Наконец, подстановка полученных A_* и ω_* в (4.13) дает (4.24). $\square$

4.4.2. Анализ чаттеринга на основе уравнения гармонического баланса для алгоритма «Супер-Скручивания»

Непосредственная подстановка $-1/\tilde{G}(j\omega)$ (4.20) и STA DF (4.10) в уравнение НВ (4.8) дает

$$\frac{\alpha_1 k_1}{A^{1/2}} - j \frac{\alpha_2 k_2}{\omega A} = \frac{(v\tau^2 + 4\tau)\omega^2 - 4v}{p(\tau^2\omega^2 + 4)} + j\omega \frac{\tau^2\omega^2 - 4(v\tau + 1)}{p(\tau^2\omega^2 + 4)}. \quad (4.26)$$

Выразив амплитуду A из уравнения для действительной части НВ (4.26) в виде $A = (\alpha_1 k_1 / \text{Re}[-\tilde{G}^{-1}(j\omega)])^2$ и подставив полученное выражение в уравнение для мнимой части, получим

$$\Psi(\omega) = -\frac{\alpha_2 k_2}{(\alpha_1 k_1)^2} \left(\text{Re}[-\tilde{G}^{-1}(j\omega)] \right)^2 - \omega \cdot \text{Im}[-\tilde{G}^{-1}(j\omega)], \quad (4.27)$$

где оценка на частоту чаттеринга $\omega_* > 0$ может быть найдена из решения $\Psi(\omega_*) = 0$.

Утверждение 4.3. Предсказываемая амплитуда чаттеринга для замкнутой системы уравнений (4.19), (4.4) может быть оценена как

$$A_* = \frac{\left(\alpha_1 k_1 p(\tau^2 \omega_*^2 + 4) \right)^2}{\left((v\tau^2 + 4\tau)\omega_*^2 - 4v \right)^2}, \quad (4.28)$$

где квадрат частоты чаттеринга

$$\omega_*^2 = S + T - \frac{b_2}{3b_3}, \quad (4.29)$$

является наибольшим положительным корнем кубического уравнения

$$b_3\omega^6 + b_2\omega^4 + b_1\omega^2 + b_0 = 0, \quad (4.30)$$

где $b_3 = c_1^2 p \tau^4$, $b_2 = 16c_2\tau^2 + 8c_2\tau^2 v^2 + c_2 v^2 \tau^4 - 4pc_1^2 v \tau^3$, $b_1 = -(16pc_1^2 + 32c_2 v \tau + 16pc_1^2 v \tau + 8c_2 v^2 \tau^2)$, $b_0 = 16v^2 c_2$ при $c_1 = \alpha_1 k_1$ и $c_2 = \alpha_2 k_2$, $S = \sqrt[3]{-R/2 + \sqrt{\Delta}}$ и $T = \sqrt[3]{-R/2 - \sqrt{\Delta}}$, $\Delta = (Q/3)^3 + (R/2)^2$, $Q = (3b_3 b_1 - b_2^2)/(3b_3^2)$ и $R = (27b_3^2 b_0 - 9b_3 b_2 b_1 + 2b_2^3)/(27b_3^3)$.

Средняя мощность оценивается как

$$\bar{P}_* = \frac{A_*^2 \sqrt{\omega_*^2 + v^2}}{2\pi p} ((2\angle G_p + \pi) \cos(\angle G_p) - 2 \sin(\angle G_p)), \quad (4.31)$$

где $\angle G_p = -\text{atan}(\omega_*/v)$.

Доказательство. Подстановка $\tilde{G}(j\omega)$ уравнения (4.20) в замкнутом виде в выражение для $A = (\alpha_1 k_1 / \text{Re}[-\tilde{G}^{-1}(j\omega)])^2$ и уравнение (4.27) дает уравнение (4.28), тогда как $\Psi(\omega)$ упрощается до кубического уравнения относительно $\Omega = \omega^2$, как показано в уравнении (4.30). Решение кубического уравнения (4.30) по формулам Кардано дает

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= S + T - \frac{b_2}{3b_3}, \\ \Omega_{2,3} &= -\frac{1}{2}(S + T) - \frac{b_2}{3b_3} \mp i \frac{\sqrt{3}}{2}(S - T). \end{aligned} \quad (4.32)$$

Тогда уравнение (4.30) при $b_3, b_0 > 0$ и $b_1 < 0$ имеет либо три действительных корня (один отрицательный и два положительных), если его дискриминант положителен, либо пару комплексно сопряженных корней и один отрицательный действительный корень, если дискриминант отрицателен.

Используя рассуждения, аналогичные приведенным в [53], заметим, что годограф Найквиста модели FOPDT располагается в третьем квадранте, как и STA DF (см. Рис. 4.4). Следовательно, существует по крайней мере один положительный действительный корень $\omega_* > 0$, удовлетворяющий как уравнению НВ (4.26), так и уравнению (4.30).

Тогда при $v^{-1} > \tau > 0$ (поскольку τ соответствует паразитной динамике с меньшей постоянной времени) и $p > 0$ (4.6) уравнение (4.30) имеет два положительных корня порядков $\mathcal{O}(v)$ и $\mathcal{O}(1/\tau)$, которые относятся к основной и паразитной динамике соответственно, как показано в работе [156]. Поэтому именно наибольший корень Ω_1 уравнения (4.30) оценивает частоту чаттеринга ω_* . Подстановка A_* и ω_* в (4.13) дает необходимое выражение для $\bar{P}_*$ (4.31). $\square$

Замечание 4.3. Для системы с идеальным интегратором и запаздыванием (при $v = 0$ в уравнении (4.6)), управляемой STA [67], кубическое уравнение (4.30) сводится к квадратному уравнению относительно $\tilde{\Omega} = \omega^2$ вида $b_3 \tilde{\Omega}^2 + \tilde{b}_2 \tilde{\Omega} + \tilde{b}_1 = 0$, где $\tilde{b}_2 = 16c_2 \tau^2$ и $\tilde{b}_1 = -16pc_1^2$. При $b_0 = 0$ формула Кардано упрощается, и Ω_1 переходит в $\tilde{\Omega}_1 = (-\tilde{b}_2 + \sqrt{\tilde{b}_2^2 - 4b_3 \tilde{b}_1})/2b_3$. Частота чаттеринга ω_* в работе [67] определяется как квадратный корень из наибольшего действительного корня, т.е. $\tilde{\Omega}_1$, что подтверждает корректность Утверждения 4.3.

Сформулированный ниже алгоритм 4.1 объединяет полученные ранее результаты (метод на основе кривой отклика, процедуру анализа чаттеринга, Утверждение 4.3) в единую вычислительную процедуру.

Алгоритм 4.1 Алгоритм настройки коэффициентов STA

Require: Кривая отклика системы на ступенчатый сигнал, константа Липшица L (4.5);

1: *Идентификация параметров:*

Определить параметры p , v и τ аппроксимации FOPDT (4.6) на основе кривой отклика (см. Рис. 4.1);

2: *Оценка чаттеринга методом НВ:*

Зафиксировать параметр $k_2 = 1,1L$ для заданной константы Липшица L в соответствии с работой [145];

Вычислить установившуюся амплитуду колебаний A_* , частоту ω_* и среднюю мощность $\bar{P}_*$, решив уравнение НВ на основе Утверждения 4.3;

3: *Оптимизация коэффициентов:*

Численно или аналитически подобрать коэффициент k_1 , минимизирующий оценку либо амплитуду чаттеринга (4.28), либо частоту (4.29) либо среднюю мощность (4.31);

return Коэффициент k_1 , минимизирующий выбранную характеристику чаттеринга.

4.5. Эксперименты

4.5.1. Управление скоростью ДПТ

В настоящем разделе представлена реализация предлагаемой процедуры на установке «Rotary Servo Base Unit» (Quanser SRV02) (Рис. 4.5, а). Предполагается, что сервомотор в режиме ДПТ может быть аппроксимирован системой первого порядка, входом которой является напряжение, а выходом — угловая скорость. Поскольку с помощью энкодеров измеряется лишь координата, то угловая скорость оценивается на основе равномерного робастного точного дифференциатора (Uniform Robust Exact Differentiator, URED) [157].

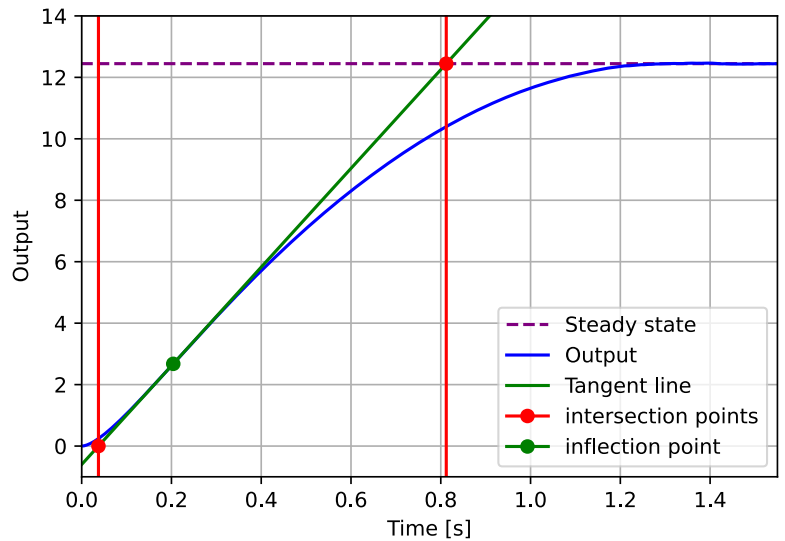
Ниже представлено поэтапное применение разработанной методики в соответствии с алгоритмом 4.1. На первом шаге на основе кривой отклика на ступенчатое воздействие (рисунок 4.5, б) были идентифицированы следующие параметры FOPDT модели (4.6):

$$K = 1,778, \tau = 0,035, v = 0,775. \quad (4.33)$$

Второй шаг включает оценку частоты чаттеринга ω и амплитуды A (4.29) и (4.28) соответственно на основании утверждения 4.3.

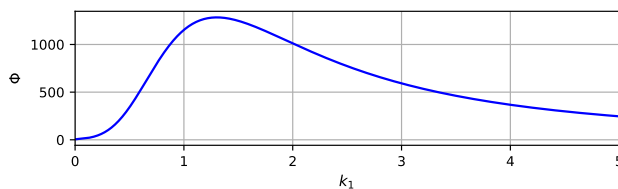


а)

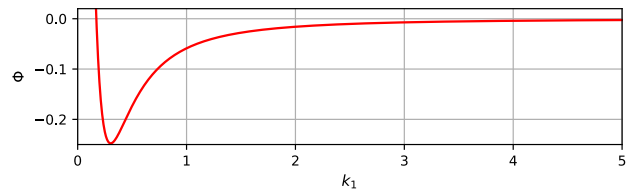


б)

Рисунок 4.5 — Объект управления — двигатель постоянного тока Quanser SRV02: а) общий вид двигателя; б) кривая отклика на единичное ступенчатое воздействие



а)



б)

Рисунок 4.6 — Критерий Лозба Φ при фиксированном $k_2 = 1,1$ и $k_1 \in (0, 5]$ для корня Ω_1 (синяя линия) и Ω_2 (красная линия) (4.32)

На рисунке 4.6 представлены значения величины Φ (4.11) из критерия Лозба для идентифицированных значений (4.33). Видно, что величина Φ (4.11) действительно положительна для всех $k_1 > 0$ в случае истинного решения (4.29) (Ω_1 (4.32)) уравнения НВ (4.26) (Рис. 4.6, а) и отрицателен для положительного корня $\Omega_{2,3}$ (4.32), также подтверждая корректность Утверждения 4.3.

Заключительный шаг заключается в выборе коэффициента k_1 , минимизирующего оценку амплитуды чаттеринга (4.28). В связи со сложностью выражения (4.28) минимизация выполнялась графически.

На рисунке 4.7 представлены оценочные значения амплитуды для различных коэффициентов усиления STA $k_1 \in (0, 5]$ (синяя линия). Из графика видно, что коэффициент $k_1 = 0,968$ STA действительно минимизирует оценку амплитуды чаттеринга (4.28).

Также проводилось моделирование замкнутой системы (4.6), (4.4) с параметрами (4.33) для каждого значения $k_1 \in \{0,05; 0,1; \dots; 5,0\}$. В установившемся режиме рассчитывалась амплитуда чаттеринга (Рис. 4.7, красная линия). Интегрирование осуществлялось методом Эйлера с шагом $dt = 0,001$.

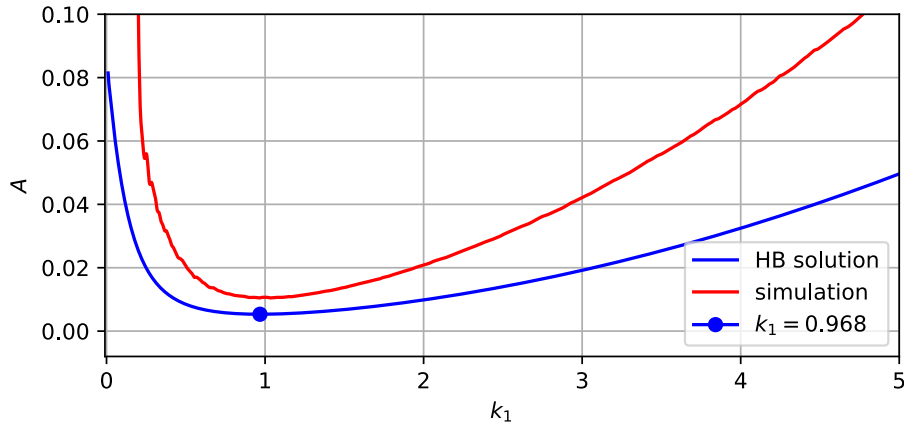


Рисунок 4.7 — Амплитуда чаттеринга A аналитически оцененная (4.28) (синяя линия) и полученная в моделировании (красная линия) при фиксированном $k_2 = 1,1$ и $k_1 \in (0, 5]$.

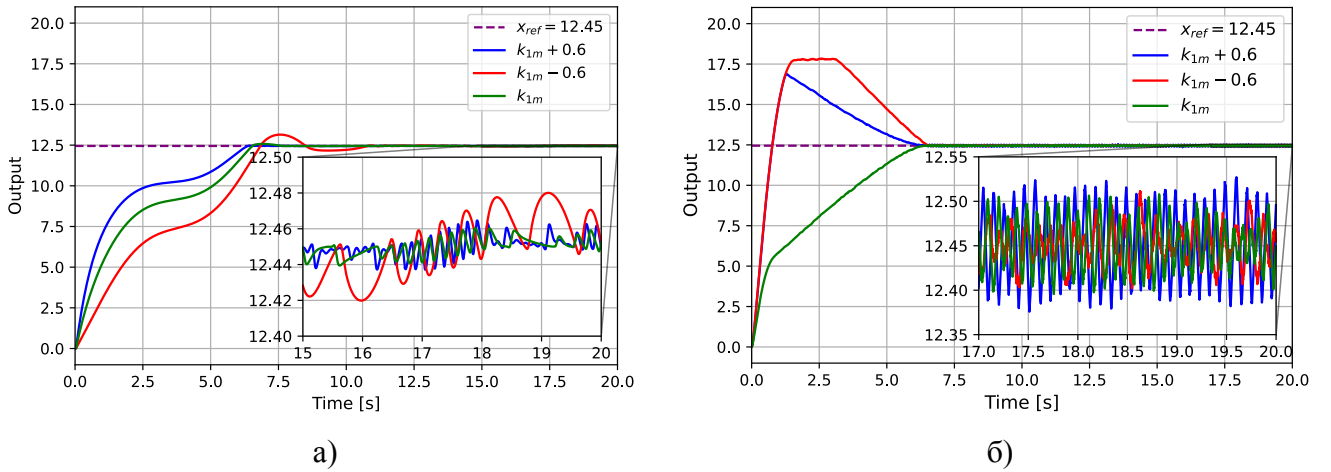


Рисунок 4.8 — Переходный процесс $y(t)$ для системы замкнутой STA (4.4) для $k_2 = 1,1$, $k_1 = 0,968$ и $k_1 = 0,968 \pm 0,6$ при $f(t) = \sin(t)$: а) моделирование; б) эксперимент на ДПТ

Несмотря на расхождение фактической амплитуды чаттеринга с теоретическими оценками, вызванное, по-видимому, погрешностями дискретизации и идентификации, предложенное значение $k_1 = 0,968$ обеспечивает минимум амплитуды.

Предварительно выполнено численное моделирование замкнутой системы (4.1) в условиях возмущения $f(t) = \sin(t)$ при постоянном задающем сигнале $r = 12,45$ град/с. На Рис. 4.8 а и 4.8 б приведены результаты моделирования и натурного эксперимента соответственно, полученные для оптимального коэффициента $k_1 = 0,968$. Анализ результатов показывает, что предложенное значение k_1 минимизирует амплитуду чаттеринга как в численном эксперименте, так и на реальном объекте.

Дополнительно выполнена серия экспериментов при варьировании коэффициента k_1 ; результаты представлены на Рис. 4.9. Наряду с оптимальным значением $k_{1m} = 0,968$ (зеленая точка), исследованы случаи $k_1 = 0,01$, $k_1 = k_{1m}$, $k_1 = k_{1m} \pm 0,3$, $k_1 = k_{1m} \pm 0,6$, $k_1 = k_{1m} + 0,9$, $k_1 = k_{1m} + 1,2$ и $k_1 = k_{1m} + 1,5$, отмеченные на рисунке оранжевыми точками. Согласно [67], для

чистого интегратора ($v = 0$) теоретическое значение коэффициента, обеспечивающего минимум амплитуды чаттеринга, составляет $k_1 = 1,434\sqrt{k_2} = 1,503$ (светло-зеленая точка).

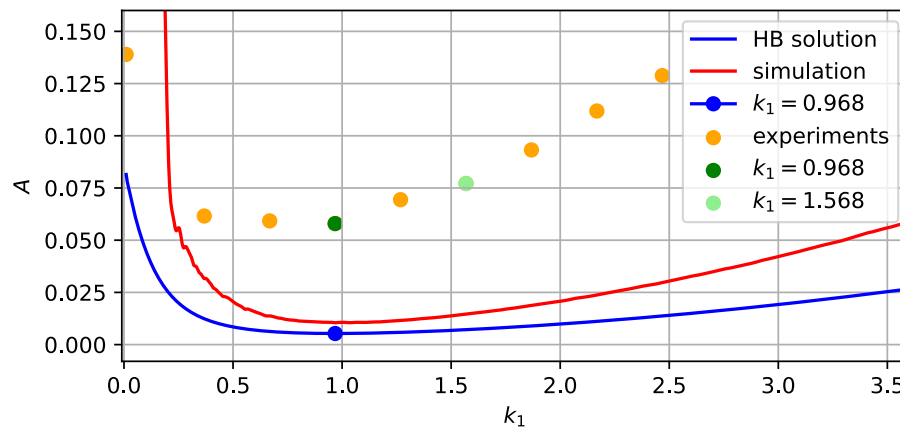


Рисунок 4.9 — Аналитически оцененная (синяя линия), полученная в моделировании (красная линия) и экспериментально полученная амплитуда чаттеринга A при фиксированном $k_2 = 1,1$ и в окрестности минимизирующего коэффициента $k_{1m} = 0,968$ (зеленая точка) для $k_1 = 0,01$, $k_1 = k_{1m} \pm 0,3$, $k_1 = k_{1m} \pm 0,6$, $k_1 = k_{1m} + 0,9$, $k_1 = k_{1m} + 1,2$, $k_1 = k_{1m} + 1,5$ и $k_1 = 1,434\sqrt{k_2} = 1,503$ (светло-зеленая точка)

Результаты эксперимента (рис. 4.9) свидетельствуют, что коэффициент усиления, рассчитанный с учетом полюса линейной части, обеспечивает существенно меньшую амплитуду чаттеринга ($A = 0,067$) по сравнению с подходом [67], предполагающим чистый интегратор ($A = 0,097$). Полученное расхождение подчеркивает важность корректного учета динамики полюса при настройке регулятора для повышения точности управления (уменьшение ошибки на 31 %).

4.5.2. Управление положением ДПТ

Экспериментальная проверка выполнена на коллекторном двигателе постоянного тока Maхon RE 40 с постоянной нагрузкой без редуктора (Рис. 4.10, а).

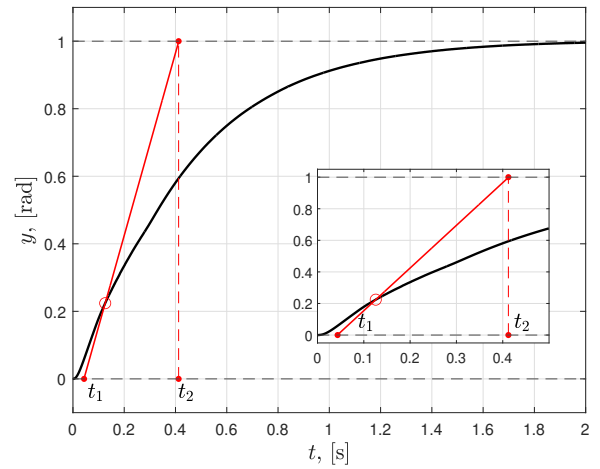
Отметим, что электромеханическая система с управлением по моменту описывается уравнениями с электрической и механической компонентами, что соответствует динамике второго порядка с относительным порядком, равным двум. В этом случае прямая аппроксимация передаточной функции моделью FOPDT является некорректной.

Вместе с тем, в сервоприводах реализуется каскадная структура управления (контуры тока, скорости и положения). При достаточном быстродействии внутренних контуров динамика замкнутой системы определяется внешним контуром положения, вносящим доминирующий полюс. В результате передаточная функция замкнутого сервопривода по задающему воздействию

допускает аппроксимацию моделью FOPDT, что и обуславливает ее применение в настоящем разделе.



а)



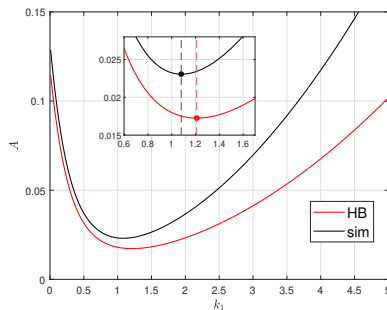
б)

Рисунок 4.10 — Объект управления — двигатель постоянного тока Maxon RE 40: а) общий вид установки; б) кривая отклика на единичный ступенчатый сигнал

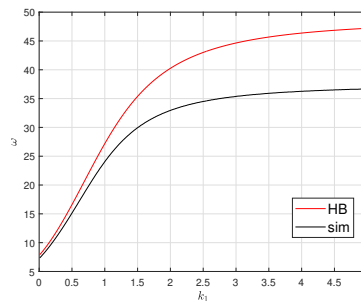
Идентифицированные параметры экспериментальной установки в форме FOPDT (4.6), полученные с использованием кривой отклика, показанной на Рис. 4.10 б, равны

$$p = 2,71, v = 2,71, \tau = 0,0434. \quad (4.34)$$

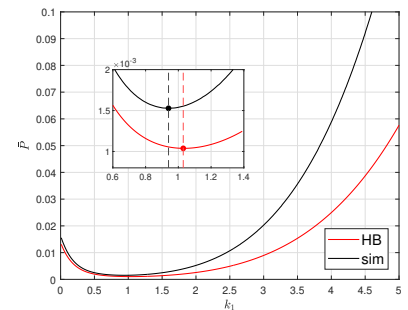
Согласно алгоритму 4.1, на основе идентифицированных параметров (4.34) построены зависимости амплитуды A , частоты ω и средней мощности $\bar{P}$ чаттеринга от коэффициента усиления k_1 при $k_2 = 1,1L = 2,2$ и отсутствии возмущений ($f(t) \equiv 0$) (Рис. 4.11).



а)



б)



в)

Рисунок 4.11 — Параметры чаттеринга замкнутой системы (4.20), (4.4) при $f(t) = 0$: а) амплитуда A ; б) частота ω ; в) средняя мощность $\bar{P}$. Красная кривая — аналитическая оценка (утверждение 4.3), черная — результаты моделирования, минимумы отмечены точками

Как и ранее, полученные оценки сравнивались с результатами моделирования замкнутой системы (4.6), (4.4), (4.34), где численное интегрирование выполнялось методом Эйлера (шаг 10^{-4} с).

Соответственно, переходные процессы в замкнутой системе (4.6), (4.4) в случае, когда коэффициент STA $k_1 = k_{\heartsuit} \triangleq 1,2$ выбран⁴ для минимизации амплитуды, и в его окрестности: $k_{\heartsuit} + 0,6$ и $k_{\heartsuit} - 0,6$, в номинальном случае ($f(t) = 0$) и при наличии возмущений

$$f(t) = 1,0 + \frac{1}{2\pi} \sin(2\pi t) + \frac{0,8}{10\pi} \sin(10\pi t),$$

показаны на Рис. 4.12 а и б соответственно. Видно, что, несмотря на влияние возмущения $f(t)$

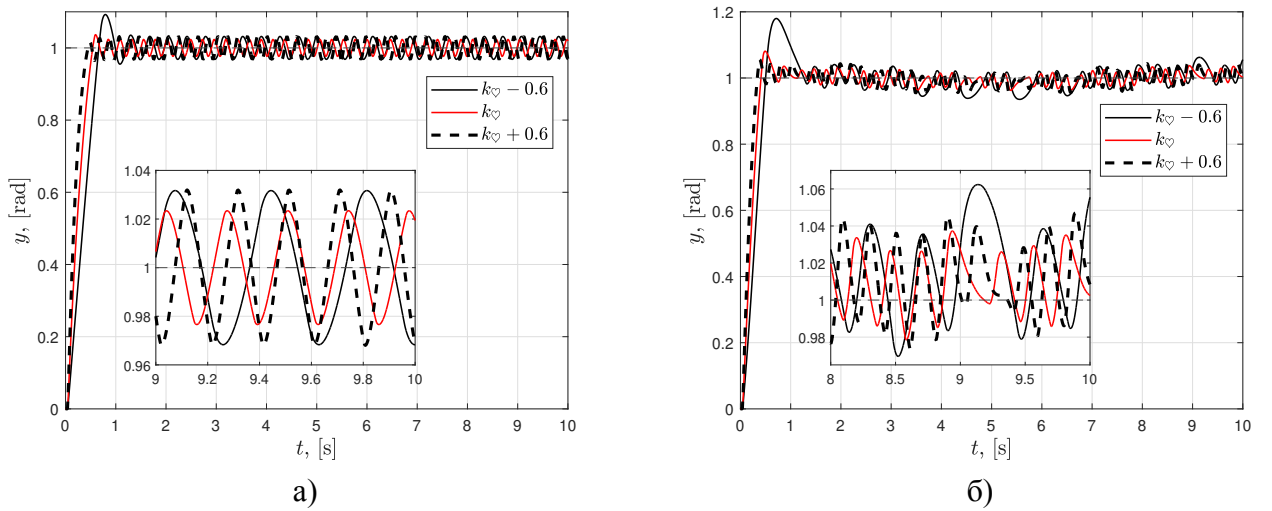


Рисунок 4.12 — Переходные процессы системы (4.6) под управлением STA (4.4) в моделировании с коэффициентами усиления $k_{\heartsuit} = 1,2$, $k_2 = 1,1L = 2,2$; а) для номинального ($f(t) = 0$) случая; б) возмущенного случая

как на форму, так и на амплитуду выхода, выбранный коэффициент усиления $k_{\heartsuit}$ по-прежнему минимизирует его влияние, в то время как надлежащим образом подобранный $k_2 = 1,1L$ обеспечивает устойчивость системы.

Как и ранее, устойчивость замкнутой системы (4.6), (4.4) проверена по критерию Лозба [53, 62, 158] путем подстановки в (4.11) значений A_* и ω_* , определенных в утверждении 4.3. На Рис. 4.13 представлено поведение двух положительных корней уравнения (4.30): медленного ω_2^* порядка $\mathcal{O}(v)$ (соответствует $\sqrt{\Omega_2}$ в (4.32)) и быстрого ω_1^* порядка $\mathcal{O}(1/\tau)$ (соответствует $\sqrt{\Omega_1}$ в (4.29)). Согласно рисунку 4.13, при $k_1 > 0,35$ медленный корень ω_2^* соответствует неустойчивому решению, тогда как быстрый корень ω_1^* удовлетворяет критерию Лозба ($\Phi > 0$) для всех рассмотренных значений k_1 ⁵. Оценки НВ (4.30), соответствующие устойчивому корню ω_1^* , согласуются с экспериментально наблюдаемым чаттерингом. Это иллюстрируется как в

⁴Для ясности $k_{\heartsuit}$ используется исключительно здесь и далее как метка субоптимального значения k_1 и не является независимым параметром настройки.

⁵Связь критерия Лозба с анализом устойчивости системы (4.6), (4.4) в пространстве состояний рассмотрена в [72].

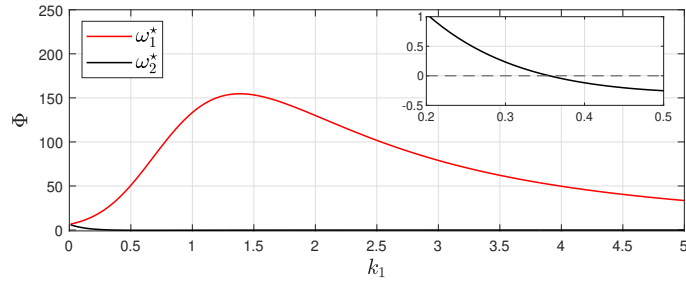


Рисунок 4.13 — Критерий Лоэба Φ как функция $k_1 \in (0, 5]$ при фиксированном $k_2 = 1,1$

доказательстве утверждения 4.3, так и сопоставлением с результатами моделирования (рисунок 4.11: красная линия — аналитический оценка, черная — результаты моделирования).

LCSMC здесь не показан, поскольку критерий Лоэба $\Phi > 0$ выполняется для любого $\lambda > 0$, в то время как k фиксирован для компенсации липшицева возмущения.

Настройка ПИ-регулятора на основе кривой отклика

Алгоритм STA (4.4) является нелинейным аналогом ПИ-регулятора для класса регуляторов на основе скользящего режима, что обусловлено сочетанием разрывного члена (робастность в скользящем режиме) и интегрального действия. Указанная аналогия вместе со способностью линейного ПИ-регулятора формировать произвольную динамику первого порядка, включая (4.6), послужила основанием для сравнительного анализа. Классический ПИ-регулятор представим в виде

$$C_{PI}(s) = k_p \left(1 + \frac{1}{t_d s} \right), \quad (4.35)$$

где k_p , t_d — его коэффициенты. В свою очередь, параметры ПИ-регулятора, полученные по методам Циглера-Никольса и Козна-Куна [151], представлены в таблице 19.

Таблица 19 — Правила настройки ПИ-регулятора (4.35) по кривой отклика: методы Циглера–Никольса и Козна–Куна

Метод	k_p	t_d
Циглера-Никольса	$\frac{0,9}{p\tau}$	3τ
Козна-Куна	$\frac{1}{p\tau} \left[0,9 + \frac{\tau v}{12} \right]$	$\frac{\tau \left[\frac{30}{v} + 3\tau \right]}{9/v + 20\tau}$

Эти результаты служат некоторым эталоном для оценки эффективности предлагаемой стратегии управления по сравнению с традиционными методами.

Сравнение систем управления

В эксперименте сравниваются следующие регуляторы: ПИ-регулятор (4.35), настроенный по правилам Циглера-Никольса и Козна-Куна, LCSMC с $\lambda = 3,0$ и $k = 1,1L$, а также STA ($k_2 = 1,1L$) как с *предлагаемыми* коэффициентами усиления (см. утверждение 4.3), так и с коэффициентами из работы [67] (соответствующими $v = 0$): $k_1 = 1,434\sqrt{k_2}$ для минимизации амплитуды чаттеринга и $k_1 = 1,242\sqrt{k_2}$ для минимизации средней мощности.

Сначала оценивается работа STA с *предлагаемыми* коэффициентами усиления в номинальных ($f(t) = 0$) и возмущенных ($f(t) = \frac{1,0}{0,2\pi} \sin(0,2\pi t) + \frac{0,6}{2\pi} \sin(2\pi t) + \frac{0,2}{18\pi} \sin(18\pi t)$) условиях в эксперименте (рис. 4.14). Эти результаты сравниваются с ранее полученными данными моделирования (рисунок 4.12). Хотя измеренная амплитуда в эксперименте несколько отличается

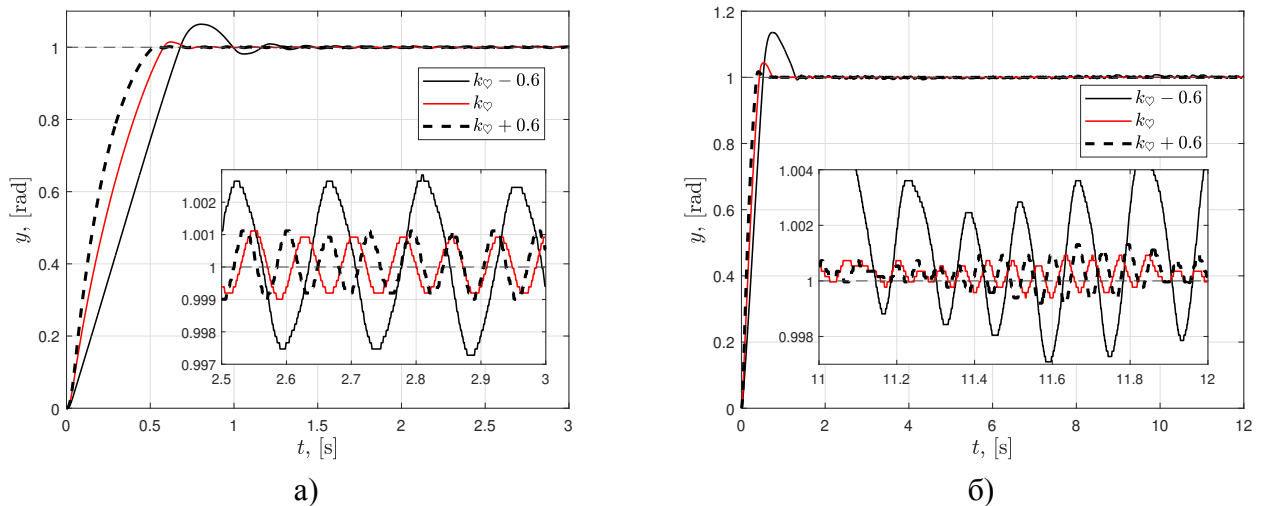


Рисунок 4.14 — Переходные процессы системы (4.6) под управлением STA (4.4) в эксперименте с коэффициентами усиления $k_v = 1,2$ и $k_2 = 1,1L = 2,2$: а) для номинального ($f(t) = 0$) случая; б) для возмущенного случая

от прогнозов моделирования, предлагаемые коэффициенты усиления по-прежнему эффективно минимизируют амплитуду чаттеринга.

Далее было проведено сравнение всех пяти регуляторов в задаче стабилизации положения ($r = 1$) при том же возмущении $f(t) = \frac{1,0}{0,2\pi} \sin(0,2\pi t) + \frac{0,6}{2\pi} \sin(2\pi t) + \frac{0,2}{18\pi} \sin(18\pi t)$. Полученные графики переходных процессов показаны на рисунке 4.15. Соответствующее СКО ошибки слежения $e(t) = r - y(t)$ в установившемся режиме ($t \geq 1,5$ с) для каждого регулятора представлено в таблице 20. Можно наблюдать, что предлагаемая модификация STA существенно повышает робастность замкнутой системы, а выбранные коэффициенты усиления STA обеспечивают наименьшую ошибку слежения (амплитуду чаттеринга), сравнимую как с традиционными ПИ-регуляторами, так и со STA с коэффициентами [67], выбранными без учета динамики системы ($v = 0$).

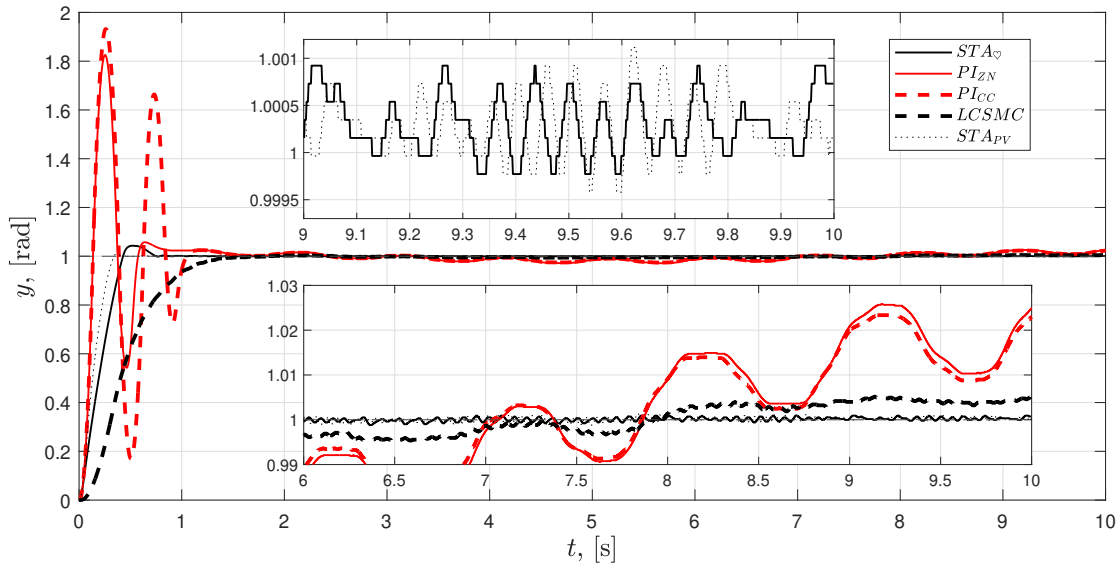


Рисунок 4.15 — Переходные процессы системы (4.6), замкнутой законами управления: STA (4.4) с $k_{\heartsuit} = 1, 2$, ПИ-регулятором (4.35) с выбором коэффициентов по Циглеру-Никольсу, ПИ-регулятором (4.35) с коэффициентами Козна-Куна, LCSMC (4.2), STA (4.4) с выбором коэффициентов из [67] (обозначен STA_{PV}) в эксперименте при возмущении $f(t)$ и $L = 2$

Таблица 20 — Сравнение СКО ошибки слежения $e(t) = r - y(t)$ в установившемся режиме ($t \geq 1,5$ с) для различных законов управления в эксперименте с возмущением

$e(t)$	PI_{ZN}	PI_{CC}	STA [67]	LCSMC	$STA_{\heartsuit}$
$e_{\max}, 10^{-2}$ рад	2,8415	2,5922	0,1379	0,5980	0,1187
$e_{\text{rms}}, 10^{-2}$ рад	1,5625	1,4118	0,0514	0,3674	0,0458

Наконец, была проведена серия экспериментов для различных коэффициентов усиления STA $k_1 \in [0, 2, 5, 2]$. Из этих экспериментов были измерены амплитуда и частота установившихся колебаний, а также вычислена соответствующая средняя энергия. Полученные графики представлены на рисунке 4.16, где каждое значение k_1 с соответствующей амплитудой A (рисунок 4.16, а) и средней мощностью P (рисунок 4.16, б) отмечено точками. Черные точки соответствуют выбору коэффициента усиления из работы [67]. Коэффициенты усиления STA, эффективно минимизирующие амплитуду и среднюю мощность в экспериментах, оказались очень близки к *прогнозируемым* значениям: 1,4 против 1,2 для A и 1,4 против 1,05 для $\bar{P}$. Напротив, пренебрежение доминирующим полюсом ($v = 0$) привело к существенным расхождениям, дав значения 2,1 и 1,8 соответственно.

Обсуждение

Следует отметить, что ключевой проблемой, выявленной в классической литературе для методов настройки на основе кривой отклика, — оценка времени запаздывания τ наряду

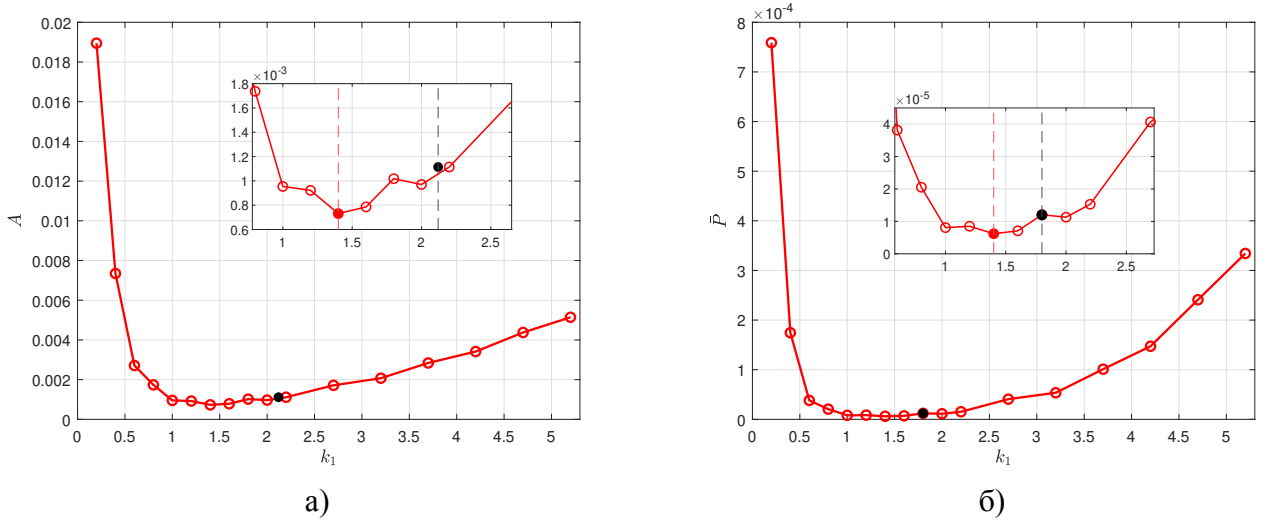


Рисунок 4.16 — Экспериментальные параметры чаттеринга замкнутой системы (4.6), (4.4) как функции коэффициента усиления k_1 с параметрами (4.7) при фиксированном $k_2 = 2,2$ и отсутствии внешнего возмущения ($f(t) = 0$): а) амплитуда чаттеринга A ; б) средняя мощность $\bar{P}$. Черные точки указывают значения амплитуды A и средней мощности $\bar{P}$, полученные с использованием выбора коэффициента усиления из работы [67] (при $v = 0$)

с параметрами p и v как в существующих методах [144, 151], так и в предлагаемом подходе. Даже незначительные расхождения в оценке τ могут приводить к отклонениям между смоделированными и экспериментальными характеристиками чаттеринга, что подтверждается различиями в амплитуде и частоте между моделированием (рисунок 4.11) и экспериментом (рисунок 4.16). Для иллюстрации этой чувствительности изменим идентифицированное запаздывание в уравнении (4.34) с $\tau = 0,0434$ на $\tau = 0,0075$ и сравним полученные параметры чаттеринга: амплитуду A , частоту ω и среднюю мощность $\bar{P}$, предсказанные уравнением НВ, в моделировании и в эксперименте (рисунок 4.17). Нелинейности, не удовлетворяющие

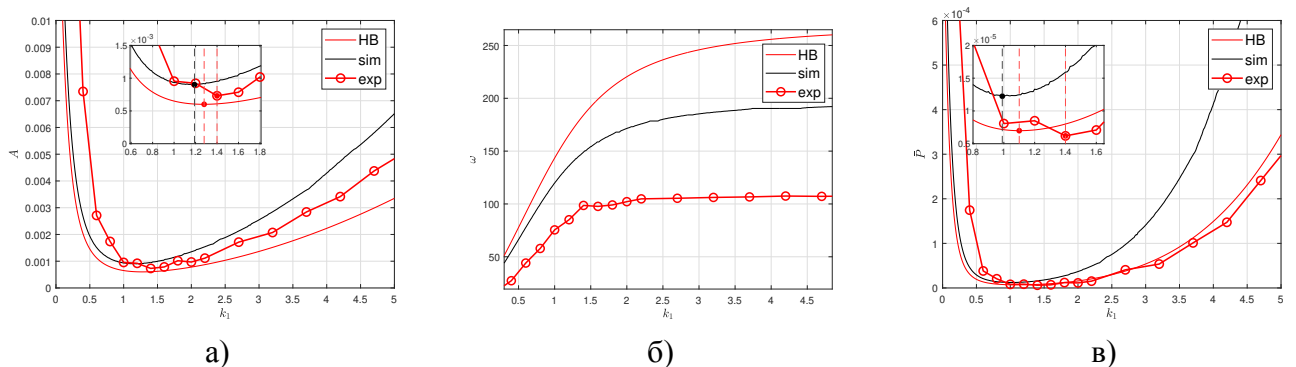


Рисунок 4.17 — Параметры чаттеринга замкнутой системы (4.20), (4.4) при $k_2 = 1,1L$, $f(t) = 0$ и $\tau = 0,0075$: а) амплитуда A ; б) частота ω ; в) средняя мощность $\bar{P}$. Красная сплошная — аналитическая оценка на основе уравнения НВ (4.26), черная сплошная — моделирование, красная сплошная с маркерами — эксперимент

условию Липшица, в частности вязкое и сухое трение, порождают возмущения, которые не могут

быть полностью скомпенсированы *ПИ*-регулятором, STA или LCSMC. Для STA, впрочем, для некоторого класса возмущений известны результаты [159, 160], гарантирующие ограниченность решения при нарушении необходимых и достаточных условий устойчивости [148, 149]. Это проявляется в виде смещения прогнозов амплитуды чаттеринга. Тем не менее теоретически определенный коэффициент k_{1m} по-прежнему доставляет минимум амплитуде чаттеринга (либо рассеянию энергии), что свидетельствует о параметрической робастности предложенной методики настройки. Альтернативой служит тест автоколебаний STA по обратной связи для уточнения параметров, недавно предложенный в [161]. Несмотря на существенное повышение точности прогнозирования, данный подход увеличивает сложность и длительность настройки.

4.5.3. Управление приводом манипулятора на примере ABB IRB 1600

Проведенная в предыдущем разделе экспериментальная верификация методики настройки STA на примере управления ДПТ подтвердила адекватность аналитических оценок и некоторую робастность предложенного подхода. Следующий этап исследования направлен на демонстрацию применимости разработанной методики к промышленному приводу манипулятора ABB IRB 1600. Как будет показано ниже, наличие встроенной каскадной системы управления в приводах робота сохраняет ключевые допущения, положенные в основу выводов предыдущего раздела, и позволяет адаптировать процедуру синтеза без принципиального изменения ее структуры. Ниже приводится описание структуры внутренних контуров регулирования.

Встроенные системы управления приводом манипулятора

Обыкновенно, для управления приводом манипулятора по обратной связи используются либо ПИД-регулятор, либо ПИ-регулятор с программной составляющей (feedforward term), как показано на рисунке 4.18. Здесь K_p^l и K_i^l — коэффициенты усиления регулятора, $\tilde{u}_l(t)$ — закон

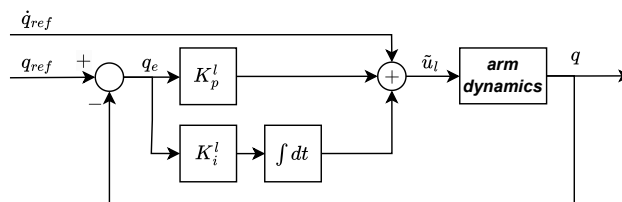


Рисунок 4.18 — Схема управления звеном манипулятора на основе ПИ-регулятора с программной составляющей, предложенная К. Линчем [14]

управления, $\dot{q}_{ref}(t)$ и $q_{ref}(t)$ — заданные скорость и положение, а $q(t)$ — измеряемый выход (положение).

В данном разделе рассматривается промышленный манипулятор ABB IRB 1600 с интерфейсом Externally Guided Motion (EGM) (аналогичные Kuka RSI и Fanuc DPM). Интерфейс EGM предоставляет возможность внешним устройствам управлять роботами ABB, передавая целевые координаты и скорости каждого шарнира.

Структура встроенной системы управления приводом ABB приведена на рисунке 4.19. По сравнению с рассмотренной ранее (см. рисунок 4.18), данная система имеет более сложную архитектуру и построена по каскадному принципу: П-регулятор по положению и ПИ-регулятор по скорости [162]. Здесь K_p , K_v и K_i — коэффициенты настройки регуляторов, $\hat{q}(t)$ — оценка скорости звена, а $\tilde{u}(t)$ — сигнал управления.

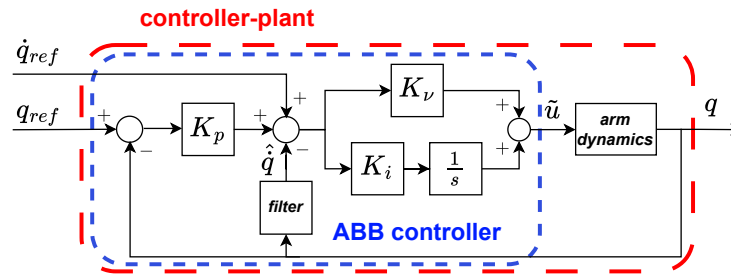


Рисунок 4.19 — Общая схема встроенных регуляторов манипулятора ABB [162]

Тогда, сигнал управления во встроенной системе управления ABB имеет вид

$$\tilde{u} = K_v [K_p(q_{ref}(t) - q(t)) + \dot{q}_{ref}(t) - \hat{q}(t)] + K_i \int [K_p(q_{ref}(t) - q(t)) + \dot{q}_{ref}(t) - \hat{q}(t)] dt. \quad (4.36)$$

Интерфейс EGM поддерживает для манипуляторов ABB две стратегии с одним входом и одним выходом (SISO) — по *положению* и по *скорости*, — и одну стратегию с несколькими входами и одним выходом (multi-input single-output, MISO) — *комбинированное* управление. В частности, производитель ABB предоставил возможность изменять только коэффициент $K_p \in [0; 20]$, причем $K_p = 0$ соответствует режиму управления по скорости, а $K_p \in (0; 20]$ — комбинированному режиму. В режиме управления по положению задающее воздействие по скорости $\dot{q}_{ref}(t)$ определяется по $q_{ref}(t)$ (рисунок 4.19).

Экспериментальное сравнение эффективности стратегий управления при решении задачи отслеживания положения $q_{ref}(t) = 0,2t - 0,19 \sin(4\pi t)$ приведено ниже на рисунке 4.20.

В режимах управления по скорости и комбинированном режиме задающее воздействие $\dot{q}_{ref}(t)$ формировалось дифференцированием заданного положения $q_{ref}(t)$. Режим управления по скорости неприменим для автономной стабилизации положения, поскольку в (4.36) отсутствует обратная связь по положению, что влечет накопление ошибки.

Ошибка слежения в режиме управления по положению превышает соответствующее значение для режима по скорости: величины $\dot{q}_{ref}(t)$ и $\hat{q}(t)$ носят оценочный характер, а

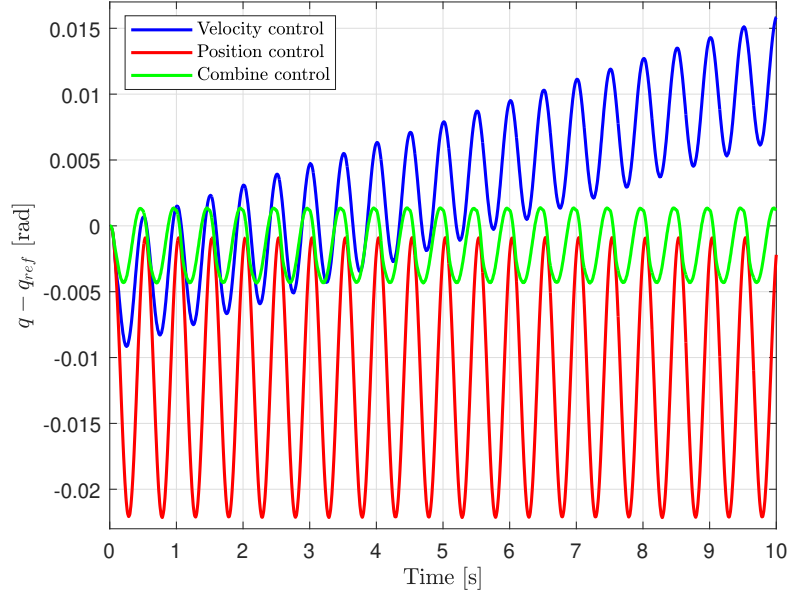


Рисунок 4.20 — Ошибка отслеживания траектории $q_{ref}(t) = 0,2t - 0,19 \sin(4\pi t)$ привода 6-го шарнира манипулятора ABB IRB 1600 для каждой стратегии

запаздывание дополнительно уменьшает точность слежения. Как можно заметить, наибольшую точность обеспечивает комбинированный режим, использующий информацию и о положении, и о скорости, однако его MISO-структура усложняет синтез внешнего контура управления.

В связи с этим в работе в качестве основы для проектирования внешнего контура выбран режим управления по скорости как SISO-система, характеризующаяся меньшей ошибкой слежения по сравнению с режимом управления по положению.

Идентификация параметров

Оказывается, что описанная в разделе ранее идентификация на основе кривой отклика на ступенчатый сигнал не может быть проведена, поскольку сигнал управления $\dot{q}_{ref}$ должен быть непрерывным и с константой Липшица $L \leq 10$, которая была подобрана эмпирически. Поэтому для идентификации параметров объекта были выбраны входные сигналы следующего вида:

$$\dot{q}_{ref}(t) = A + \sum_{i=1}^3 B_i \cos(\omega_i t), \quad q_{ref}(t) = At + \sum_{i=1}^3 \frac{B_i}{\omega_i} \sin(\omega_i t) + q_0, \quad (4.37)$$

где $\omega_i \in [2\pi \dots 32\pi]$ рад/с, $\dot{q}_{ref}(0) \leq 0,3$ рад/с, A , B_i и $q_0 = q_{ref}(0)$ были выбраны так, чтобы $\dot{q}_{ref}(t) \geq 0, \forall t \in [0 \dots 10]$ с, $i = \overline{1,3}$, а кроме того $q_{ref}(t) \in [-2\pi, 2\pi]$ для всех t .

Интервальные ограничения на ω_i были введены из-за ограничений встроенной системы управления и динамики звена. Что касается условия $\dot{q}_{ref}(t) \geq 0$, то оно было выбрано, чтобы не учитывать изменение знака трения Кулона при переходе через $\dot{q}(t) = 0$.

Поскольку рассматривается режим управления приводом по скорости, что соответствует $K_p = 0$ в законе управления (4.36), то изначальная схема (рисунок 4.19) может быть преобразована к схеме на рисунке 4.21, которая приведена ниже.

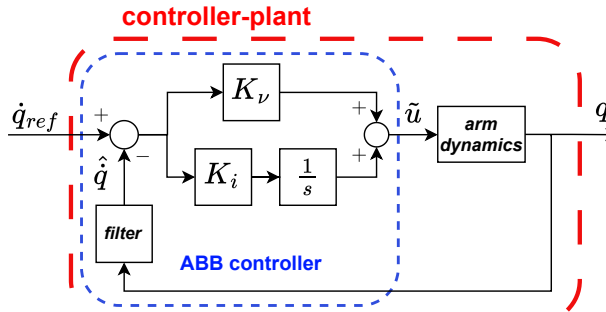


Рисунок 4.21 — Схема управления приводом ABB по скорости

Заметим, что соотношение между управляющим воздействием $\dot{q}_{ref}(t)$ и выходной координатой $q(t)$ имеет вполне конкретный характер. Следовательно, при идеальной работе внутреннего контура управления (обведен штриховой синей линией на рисунке 4.19) динамика всего объекта управления (обведена штриховой красной линией) описывалась бы передаточной функцией $1/s$. На практике неидеальности системы приводят к тому, передаточная функция объекта управления $G(s)$ может быть аппроксимирована моделью FOPDT (4.6):

$$G(s) = \frac{p}{s + v} e^{-\tau s},$$

Применяя последовательно поиск методом наименьших квадратов в подпространстве по Гауссу–Ньютону и методом Левенберга–Марквардта, были получены следующие параметры системы (4.6): $p = 1,00086$, $v = 2,05613 \cdot 10^{-4}$, $\tau = 0,024$ с. Фактически, значение времени запаздывания $\tau = 0,024$ совпало с указанным производителем ABB, подтверждая корректность идентификации.

Как упоминалось ранее, для управления положением звена в режиме управления по скорости необходимо разработать внешний контур управления. Предлагаемая схема внешнего контура управления схематично представлена на рисунке 4.22, где объект управления (4.6) (рисунок 4.21) обведен красным пунктиром с управляющим входом, обозначенным $u(t)$, и выходом $q(t)$.

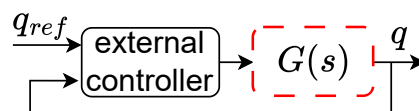


Рисунок 4.22 — Предлагаемая схема внешнего контура управления положением привода манипулятора по скорости

Для предлагаемой схемы управления на рисунке 4.22 важно выбрать регулятор, способный эффективно справляться с возмущениями системы и неидеальностями динамики. Как ранее отмечалось, в силу непрерывного сигнала управления и свойств скользящего режима второго порядка в рассмотренном случае использование STA представляется обоснованным.

Применение критерия Лоеба для проверки устойчивости чаттеринга в системе дало результаты, представленные на рисунке 4.23. Кроме того, на графике проиллюстрировано необходимое условие сходимости STA (установленное Р. Зибером в [147]) для k_1 при фиксированном $k_2 = 1,1L$ (с константой Липшица $L = 1$). Как и ранее, истинное решение ω_1

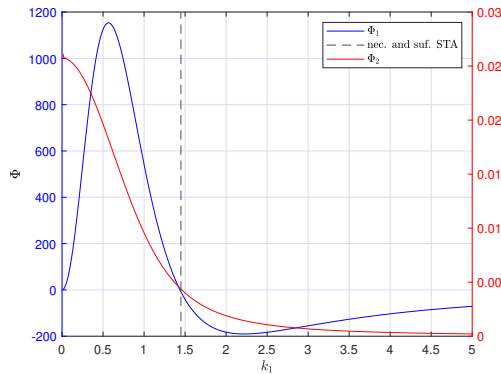


Рисунок 4.23 — Функция Φ (4.11) (критерий Лоеба) для корней ω_1 и ω_2

уравнения НВ (4.28) является устойчивым для всех значений k_1 , в то время как другой корень ω_2 теряет устойчивость при $k_1 > 1,4367$, т.е. вблизи необходимого и достаточного условия $k_1 > \sqrt{k_2 + L} = \sqrt{2,1}$.

В соответствии со вторым пунктом алгоритма 4.1, были построены графики амплитуды чаттеринга для $k_1 \in [0,02 \dots 5]$, полученные на основе утверждения 4.3 и в моделировании (рисунок 4.24). Моделирование проводилось для непрерывного объекта управления (4.6) и STA (4.4) с экстраполятором нулевого порядка (zero-order hold, ZOH) ($\Delta T = 0,004$ с). Применялся метод интегрирования Эйлера с постоянным шагом $\delta t = 10^{-4}$ с. Таким образом, коэффициенты

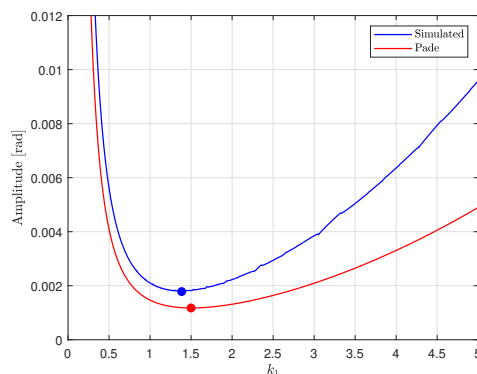


Рисунок 4.24 — Амплитуда чаттеринга A аналитически оцененная (4.28) (синяя линия) и полученная в моделировании (красная линия) при фиксированном $k_2 = 1,1L$ и $k_1 \in (0, 5]$.

усиления STA, минимизирующие амплитуду чаттеринга, равны $k_{1,\text{НВ}} = 1,50$ и $k_{1,\text{sim}} = 1,385$ для оценок полученных с помощью НВ и в моделировании соответственно. Отметим, что оценка, полученная на основе уравнения НВ (4.26), позволяет корректно определить коэффициент k_1 , минимизирующий чаттеринг, с небольшим расхождением, возрастающим при увеличении k_1 .

Следующим этапом исследована задача слежения за положением по траектории $q_{\text{ref}}(t) = 0,2t - 0,19 \sin(0,5\pi t)$. Переменная скольжения определена как $\sigma = q_{\text{ref}} - q$. В отличие от (4.4), где предполагалось постоянное задающее воздействие, здесь $q_{\text{ref}}(t)$ является известной функцией времени, что учтено в формировании эквивалентного управления [40, 42]. Результаты моделирования и натурного эксперимента на приводе 6-го шарнира АВВ 1600 с постоянной нагрузкой для $k_{1c} = 1,50$ и $k_{1c} \pm 1$ представлены на рисунке 4.25.

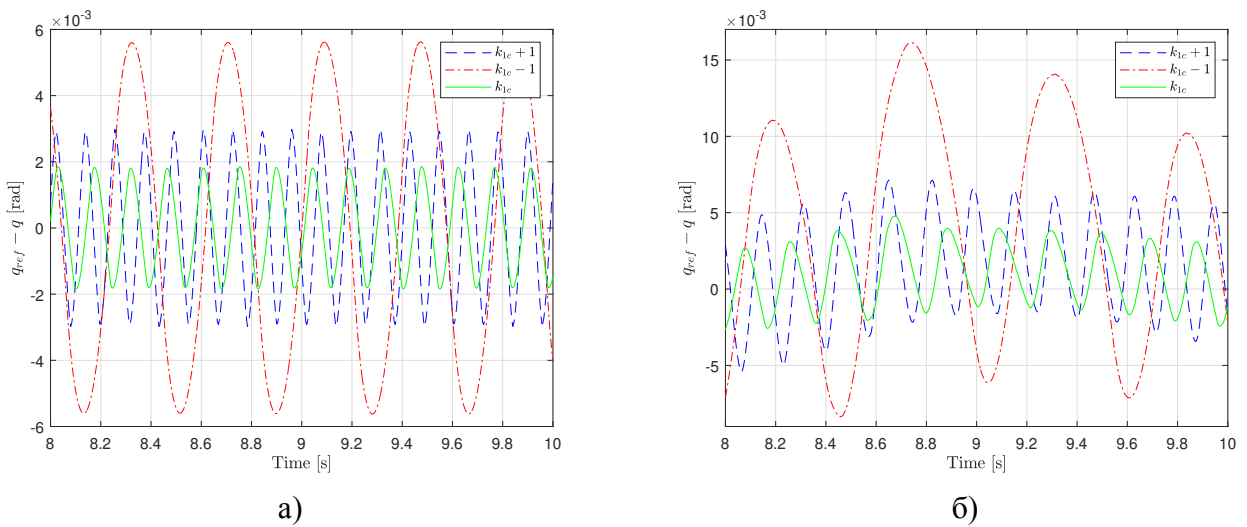


Рисунок 4.25 — Переходный процесс ошибки слежения $q_{\text{ref}} - q$ для системы замкнутой STA (4.4) при $k_2 = 1,1$, $k_{1c} = 1,5$ и $k_1 = k_{1c} \pm 1$: а) моделирование; б) эксперимент на приводе 6-го шарнира АВВ 1600

Как следует из рисунка 4.25, а, б, амплитуда и частота чаттеринга в моделировании ($A_{\text{sim}} \approx 1,82 \cdot 10^{-3}$ рад, $\omega_{\text{sim}} \approx 43,98$ рад/с) и эксперименте ($A_{\text{exp}} \approx 2,62 \cdot 10^{-3}$ рад, $\omega_{\text{exp}} \approx 30,19$ рад/с) существенно различаются. При этом коэффициент k_{1c} *доставляет минимум амплитуде чаттеринга* среди рассмотренных $k_{1c} \pm 1$.

Модель на основе линейно-квадратичного регулятора и предиктора

Помимо широко используемых ПИД-регуляторов, альтернативным подходом к борьбе с запаздыванием в контуре управления является применение предикторов [163—165], формирующих оценку будущего состояния системы по известной динамике. Это позволяет свести задачу управления к классической постановке для системы без запаздывания. Далее

рассматривается синтез внешнего контура на основе линейно-квадратичного регулятора совместно (Linear Quadratic Regulator, LQR) с предиктором.

Рассмотрим номинальную модель системы (4.6) в форме пространства состояний:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= -vx(t) + ku(t), \\ y(t) &= x(t - \tau),\end{aligned}\tag{4.38}$$

или в дискретной форме с $\Delta T = 0,004$ с и $\tau = 0,024$ с:

$$\begin{aligned}x_{k+1} &= a_d x_k + b_d u_k, \\ y_k &= x_{k-6},\end{aligned}\tag{4.39}$$

где a_d и b_d — дискретизированные коэффициенты (в соответствии с [151]) (4.38). Задача слежения для (4.39) может быть решена с помощью следующего закона управления:

$$u_k = b_d^{-1}(x_{k+1}^{\text{ref}} - a_d x_k^{\text{ref}}) + K(\hat{x}_k - x_k^{\text{ref}}),\tag{4.40}$$

где $\hat{x}_k$ — оценка состояния, x_k^{ref} — задающая траектория в k -й момент времени, а K — коэффициент усиления обратной связи. Таким образом, необходимо оценить $\hat{x}_k$ с использованием предиктора. Систему (4.39) можно переписать в расширенной форме с учетом предыдущих состояний:

$$\begin{aligned}z_{k+1} &= \hat{A}_d z_k + \hat{B}_d u_k, \\ w_k &= \hat{C}_d z_k,\end{aligned}\tag{4.41}$$

где $z_k = [x_k \dots x_{k-6}]^\top \in \mathbb{R}^7$, $\hat{A}_d = \begin{bmatrix} a_d & O_{1 \times 6} \\ I_6 & O_{6 \times 1} \end{bmatrix}$, $\hat{B}_d = [b_d \ O_{1 \times 6}]^\top$ и $\hat{C}_d = [O_{1 \times 6} \ 1]$. Тогда для оценки z_k (4.41) на каждом шаге к уравнению может быть применен наблюдатель Люенбергера, поскольку система (4.41) наблюдаема:

$$\begin{aligned}\hat{z}_{k+1} &= \hat{A}_D \hat{z}_k + L(w_k - \hat{C}_d \hat{z}_k) + \hat{B}_d u_k, \\ \hat{x}_k &= [1 \ O_{1 \times 6}] \hat{z}_k,\end{aligned}\tag{4.42}$$

где коэффициент предиктора L выбран из решения дискретной линейно-квадратичной задачи.

Сравнение систем управления

Основной вопрос заключается в том, насколько существенным является преимущество STA в задаче управления приводом. Сравним STA (4.4) с предложенными коэффициентами усиления, моделью LQR–предиктора (4.40), (4.42) и встроенной системой управления в режиме управления по положению. Режим управления по положению (рисунок 4.20) выбран, поскольку режим управления по скорости не может использоваться без внешнего управления для слежения за положением, а комбинированный режим является MISO-управлением в отличие от всех остальных законов управления. Проведена серия экспериментов по слежению за траекторией

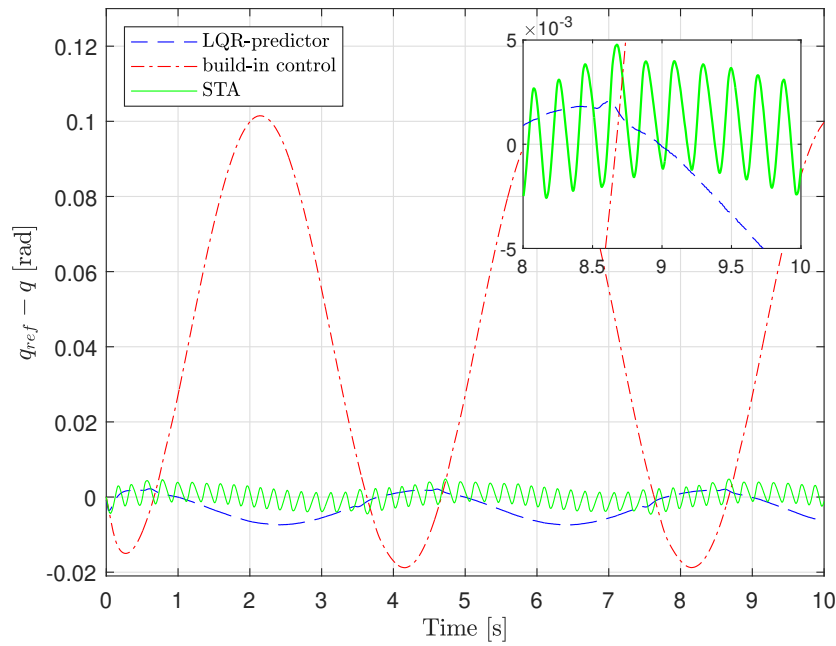


Рисунок 4.26 — Переходный процесс ошибки слежения $q_{ref} - q$ для (4.6), (4.42) в сравнении со встроенным управлением при $q_{ref} = 0,2t + 0,19 \sin(0,5\pi t)$

$q_{ref} = 0,2t + 0,19 \sin(0,5\pi t)$ с высокой воспроизводимостью, обусловленной повторяемостью движений манипулятора. Результаты одного из экспериментов приведены на рис. 4.26. Как следует из рисунка 4.26, STA демонстрирует наименьшую амплитуду ошибки ($2,62 \cdot 10^{-3}$ рад) по сравнению с LQR-предиктором ($4,61 \cdot 10^{-3}$ рад) и встроенным контуром управления ($6,01 \cdot 10^{-2}$ рад), а также отсутствие статической ошибки. Следовательно, использование робастного STA в рассмотренных условиях обосновано и с теоретической, и с экспериментальной точки зрения.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе диссертационного исследования получены следующие основные результаты:

1. Проведен анализ существующих методов кинематической калибровки манипуляторов и подходов к управлению приводами в условиях неопределенности, включая частотные методы анализа и синтеза скользящих режимов (глава 1).
2. Разработаны и доказаны аналитически преобразования параметров четырех распространенных кинематических моделей: DH, HAY, CPC и POE, а также алгоритмы на их основе. Аналитическое доказательство алгоритмов существенно уменьшает погрешности при пересчете и обеспечивает их применимость в задачах калибровки (глава 2).
3. Предложен метод автоматизированной калибровки манипулятора и робота-позиционера в составе роботизированной ячейки, основанный на использовании электрического контакта и ограничений в виде плоскостей. Метод не требует применения дорогостоящих внешних измерительных устройств и допускает проведение калибровки в автоматическом режиме (глава 3).
4. Разработана методика и программная реализация настройки коэффициентов алгоритма «Супер-Скручивания» для снижения амплитуды чаттеринга при управлении объектом, описываемым апериодическим звеном первого порядка с запаздыванием. Методика базируется на идентификации параметров объекта в специальной форме и использовании частотных методов анализа (глава 4).
5. Выполнена адаптация предложенной методики к условиям управления скоростью звеньев промышленного манипулятора. Экспериментально подтверждено снижение высокочастотных колебаний по сравнению с базовой настройкой регулятора (глава 4).

Все разработанные алгоритмы и методики реализованы программно и прошли экспериментальную апробацию на промышленном манипуляторе ABB IRB 1600; в результате показано повышение абсолютной точности позиционирования.

Таким образом, цель диссертационного исследования — повышение точности позиционирования промышленного манипулятора за счет комплексного подхода, включающего калибровку кинематической модели и синтез робастной системы управления, — достигнута.

Полученные результаты могут быть рекомендованы к внедрению на предприятиях, эксплуатирующих промышленные роботы, особенно при необходимости автономной работы в агрессивных средах или при ограниченном бюджете на высокоточное метрологическое оборудование.

Перспективные направления дальнейших исследований включают: распространение разработанного метода калибровки на динамические параметры манипулятора; интеграцию предложенной методики настройки регуляторов с адаптивными алгоритмами; обобщение методов настройки регуляторов на скользящих режимах на более широкий класс объектов управления; а также учет дополнительных динамических эффектов.

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ И УСЛОВНЫХ ОБОЗНАЧЕНИЙ

Ниже собраны соглашения и обозначения, общие для значительной части диссертации. Локальные обозначения, вводимые в отдельных главах, поясняются при первом появлении.

Соглашения

- Заглавным полужирным прямым шрифтом обозначаются матричные величины, например, **T** и **R**.
- Запись $i = \overline{1, 100}$ следует понимать как i принимает значения от 1 до 100.
- Полужирным курсивом обозначаются векторные величины, например, ***Φ*** и ***q***.
- Обычным прямым шрифтом обозначаются скалярные величины, например, A и q .
- Полярные углы и углы курса отсчитываются *против часовой стрелки* от оси x абсолютной (либо иной явно указанной) системы координат, если не оговорено иное.
- Символ $\triangleq$ означает «по определению равно» или «обозначается».
- Решения разрывных систем дифференциальных уравнений понимаются в смысле Филиппова.

Основные обозначения

- $\mathbb{SE}(3)$: специальная евклидова группа трёхмерного пространства, представляемая в виде матриц однородных координат размера 4×4 .
- $\mathbb{SO}(3)$: специальная ортогональная группа, представляемая в виде матриц поворота размера 3×3 .
- $\mathbf{Rot}_k(\gamma)$: матрица однородного преобразования из $\mathbb{SE}(3)$, соответствующая вращению вокруг вектора k на угол γ .
- $\mathbf{Tran}_l(v)$: матрица однородного преобразования из $\mathbb{SE}(3)$, соответствующая смещению вдоль вектора l на расстояние v .
- $\{\text{Tool}\}$: используется для обозначения систем координат.
- $\mathbf{T}_i^j$: матрица однородного преобразования из $\mathbb{SE}(3)$, описывающая переход из системы координат $\{j\}$ в систему координат $\{i\}$.
- $\hat{\cdot}$: обозначает отображение из векторного пространства в соответствующую структуру алгебры Ли, например $\xi \mapsto se(3)$ или $\omega \mapsto so(3)$, в зависимости от контекста.

Аббревиатуры

DH — представление Денавита-Хартенберга (*Denavit–Hartenberg convention*)

HAY — модель Хаяти (*Hayati*)

CPC — непрерывная и параметрически-непрерывная модель (*Complete and Parametrically Continuous model*)

POE — произведение матричных экспонент (*Product of Exponentials*)

STA — алгоритм «Супер-Скручивания» (*Super-Twisting Algorithm*)

HOSM — скользящие режимы высших порядков (*High-order sliding modes*)

HB — уравнение гармонического баланса (*Harmonic Balance equation*)

DF — описывающая функция (*Describing Function*)

LPRS — годограф возмущённой релейной системы (*Locus of a Perturbed Relay System*)

LCSMC — регулятор скользящих режимов с липшицевой непрерывностью (*Lipschitz Continuous Sliding Mode Controller*)

SISO — система с одним входом и одним выходом (*Single-Input Single-Output system*)

MISO — система со многими входами и одним выходом (*Multiple-Input Single-Output system*)

LQR — линейно-квадратичный регулятор (*Linear Quadratic Regulator*)

FOPDT — аperiодическое звено первого порядка с запаздыванием (*First-order plus dead-time model*)

ДПТ — двигатель постоянного тока

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Mooring, B.* Fundamentals of Manipulator Calibration / B. Mooring, M. Driels, Z. Roth. — USA : John Wiley & Sons, Inc., 1991.
2. *Hayati, S. A.* Robot arm geometric link parameter estimation / S. A. Hayati // The 22nd IEEE Conference on Decision and Control. — 1983. — P. 1477—1483.
3. *Mooring, B.* The effect of joint axis misalignment on robot positioning accuracy / B. Mooring // Proceedings of 1983 ASME Computers in Engineering Conference. — 08/1983. — P. 151—155.
4. *Mooring, B.* An improved method for identifying the kinematic parameters in a six axis robot / B. Mooring, G. Tang // International Computers in Engineering Conference and Exhibit. — 1984. — P. 79—84.
5. *Stone, H.* Arm signature identification / H. Stone, A. Sanderson, C. Neuman // Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 3. — 1986. — P. 41—48.
6. *Veitschegger, W.* Robot accuracy analysis based on kinematics / W. Veitschegger, C.-H. Wu // IEEE Journal on Robotics and Automation. — 1986. — Vol. 2, no. 3. — P. 171—179.
7. *Brockett, R.* Robotic manipulators and the product of exponentials formula / R. Brockett // Mathematical Theory of Networks and Systems / ed. by P. Fuhrmann. — Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 1984. — P. 120—129.
8. *Zhuang, H.* A complete and parametrically continuous kinematic model for robot manipulators / H. Zhuang, Z. Roth, F. Hamano // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 1. — 1990. — P. 92—97.
9. *Xuan, J.-Q.* Review on kinematics calibration technology of serial robots / J.-Q. Xuan, S.-H. Xu // International journal of precision engineering and manufacturing. — 2014. — Vol. 15, no. 8. — P. 1759—1774.
10. Comprehensive Review of Calibration Techniques for Serial Link Manipulators: Insights Into Mathematical and Methodological Evolutions / Á. Károly [et al.] // IEEE Transactions on Cybernetics. — 2026.
11. *Sumenkov, O. Y.* Kinematic calibration of an industrial manipulator without external measurement devices / O. Y. Sumenkov, D. D. Kulminskiy, S. V. Gusev // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2024. — Vol. 20, no. 5. — P. 979—1001.
12. *Malyshev, M. V.* Method of Robot Calibration with Three Kinematic Parameterization Models / M. V. Malyshev, D. D. Kulminskij // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. — 2026. — Vol. 22, no. 1. — P. 201—212.
13. *Murray, R. M.* A Mathematical Introduction to Robotic Manipulation / R. M. Murray, S. S. Sastry, L. Zexiang. — 1st. — USA : CRC Press, Inc., 1994.
14. *Lynch, K. M.* Modern Robotics: Mechanics, Planning, and Control / K. M. Lynch, F. C. Park. — 1st. — USA : Cambridge University Press, 2017.

15. *Wu, L.* An Analytic Approach to Converting POE Parameters Into D–H Parameters for Serial-Link Robots / L. Wu, R. Crawford, J. Roberts // IEEE Robotics and Automation Letters. — 2017. — Vol. 2, no. 4. — P. 2174–2179.
16. *Kuti, J.* Conversion Between Denavit-Hartenberg and Hayati Conventions for Calibration and Forward Kinematics of Manipulators”, bookTitle=”Recent Advances in Intelligent Engineering: Volume Dedicated to Imre J. Rudas Seventy-Fifth Birthday / J. Kuti, P. Galambos //. — Cham : Springer Nature Switzerland, 2024. — P. 35–47.
17. *Siciliano, B.* Springer Handbook of Robotics / B. Siciliano, O. Khatib. — Springer Berlin Heidelberg, 2008. — (Springer Handbook of Robotics).
18. *Nubiola, A.* Absolute calibration of an ABB IRB 1600 robot using a laser tracker / A. Nubiola, I. A. Bonev // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2013. — Vol. 29, no. 1. — P. 236–245.
19. *Toan, N. V.* A svd-least-square algorithm for manipulator kinematic calibration based on the product of exponentials formula / N. V. Toan, P. B. Khoi // Journal of Mechanical Science and Technology. — 2018. — Vol. 32. — P. 5401–5409.
20. A minimal kinematic model for serial robot calibration using POE formula / X. Yang [et al.] // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2014. — Vol. 30, no. 3. — P. 326–334.
21. Identification of the manipulator stiffness model parameters in industrial environment / A. Klimchik [et al.] // Mechanism and Machine Theory. — 2015. — Vol. 90. — P. 1–22.
22. *Meng, Y.* Autonomous robot calibration using vision technology / Y. Meng, H. Zhuang // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2007. — Vol. 23, no. 4. — P. 436–446.
23. *Boby, R. A.* Measurement of end-effector pose errors and the cable profile of cable-driven robot using monocular camera / R. A. Boby, A. Maloletov, A. Klimchik // Journal of Intelligent & Robotic Systems. — 2021. — Vol. 103, no. 2. — P. 32.
24. *Daney, D.* Choosing measurement poses for robot calibration with the local convergence method and Tabu search / D. Daney, Y. Papegay, B. Madeline // The International Journal of Robotics Research. — 2005. — Vol. 24, no. 6. — P. 501–518.
25. *Balanji, H. M.* A novel vision-based calibration framework for industrial robotic manipulators / H. M. Balanji, A. E. Turgut, L. T. Tunc // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2022. — Vol. 73. — P. 102248.
26. Online pose correction of an industrial robot using an optical coordinate measure machine system / S. Gharaaty [et al.] // International journal of advanced robotic systems. — 2018. — Vol. 15, no. 4. — P. 1–16.
27. *Kolyubin, S.* Consistent kinematics and dynamics calibration of lightweight redundant industrial manipulators / S. Kolyubin, A. Shiriaev, A. Jubien // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2019. — Vol. 101. — P. 243–259.

28. *Kolyubin, S.* Robot Kinematics Identification: KUKA LWR4+ Redundant Manipulator Example / S. Kolyubin, L. Paramonov, A. Shiriaev // Journal of Physics: Conference Series. — 2015. — Nov. — Vol. 659, no. 1. — P. 012011. — DOI: 10.1088/1742-6596/659/1/012011.
29. *Meggiolaro, M. A.* Manipulator calibration using a single endpoint contact constraint / M. A. Meggiolaro, G. Scriffignano, S. Dubowsky // International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference. Vol. 35173. — American Society of Mechanical Engineers. 2000. — P. 759—767.
30. An Automated Method to Calibrate Industrial Robots Using a Virtual Closed Kinematic Chain / C. S. Gatla [et al.] // IEEE Transactions on Robotics. — 2007. — Vol. 23, no. 6. — P. 1105—1116.
31. *Ikits, M.* Kinematic calibration using a plane constraint / M. Ikits, J. M. Hollerbach // Proceedings of International Conference on Robotics and Automation. Vol. 4. — IEEE. 1997. — P. 3191—3196.
32. *Zhuang, H.* Robot calibration with planar constraints / H. Zhuang, S. H. Motaghedi, Z. S. Roth // Proceedings 1999 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 1. — IEEE. 1999. — P. 805—810.
33. *Khalil, W.* Comparison study of the geometric parameters calibration methods / W. Khalil, S. Besnard, P. Lemoine // International Journal of Robotics and Automation. — 2000. — Vol. 15, no. 2. — pp—56.
34. *Besnard, S.* Geometric calibration of robots using multiple plane constraints / S. Besnard, W. Khalil, G. Garcia // Advances in robot kinematics. — Springer, 2000. — P. 61—70.
35. *Hage, H.* Practical consideration on the identification of the kinematic parameters of the Stäubli TX90 robot / H. Hage, P. Bidaud, N. Jardin // Proceedings of the 13th World Congress in Mechanism and Machine Science. Vol. 43. — 2011.
36. *Joubair, A.* Non-kinematic calibration of a six-axis serial robot using planar constraints / A. Joubair, I. A. Bonev // Precision Engineering. — 2015. — Vol. 40. — P. 325—333.
37. *Yang, P.* A calibration method for spatial error of industrial robot under variable load conditions based on double-ball rotary structure and three contact displacement sensors / P. Yang, K. Luo, R. Wu // Precision Engineering. — 2024. — Vol. 85. — P. 291—303.
38. *Joubair, A.* Kinematic calibration of a six-axis serial robot using distance and sphere constraints / A. Joubair, I. Bonev // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 2014. — Mar. — Vol. 77.
39. *Chiu, Y.-J.* Self-calibration of a general hexapod manipulator using cylinder constraints / Y.-J. Chiu, M.-H. Perng // International Journal of Machine Tools and Manufacture. — 2003. — Vol. 43, no. 10. — P. 1051—1066.
40. *Уткин, В. И.* Скользящие режимы и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. — М: Наука, 1974.
41. *Draženović, B.* The invariance conditions in variable structure systems / B. Draženović // Automatica. — 1969. — Vol. 5, no. 3. — P. 287—295.

42. *Levant, A.* Sliding order and sliding accuracy in sliding mode control / A. Levant // International journal of control. — 1993. — Vol. 58, no. 6. — P. 1247—1263.
43. *Feng, Y.* Non-singular terminal sliding mode control of rigid manipulators / Y. Feng, X. Yu, Z. Man // Automatica. — 2002. — Vol. 38, no. 12. — P. 2159—2167.
44. *Краснова, С.* Блочный синтез систем управления роботами-манипуляторами в условиях неопределенности / С. Краснова, В. Уткин, А. Уткин. — М.: ЛЕНАНД, 2014. — С. 208.
45. *Rehan, A.* Chattering in Sliding Mode Control of Robotic Manipulators / A. Rehan, I. Boiko, Y. Zweiri // European Control Conference (ECC). — 2025. — P. 3256—3261.
46. *Tabarez, L.* Finite-Time Regulation in Task Space Using Jacobian Transpose-Based Controllers / L. Tabarez, E. Cruz-Zavala, E. Nuño // IEEE Control Systems Letters. — 2026. — Vol. 10. — P. 775—780.
47. *Finite-Time Control in the Operational Space of Robot Manipulators* / E. Cruz-Zavala [et al.] // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2026. — Vol. 36, no. 12. — P. 6085—6107.
48. *Pisano, A.* Contact force regulation in wire-actuated pantographs via variable structure control and frequency-domain techniques / A. Pisano, E. Usai // International Journal of Control. — 2008. — Vol. 81, no. 11. — P. 1747—1762.
49. *Kaplan, O.* Super twisting algorithm based sliding mode controller for buck converter with constant power load / O. Kaplan, F. Bodur // 2021 9th International Conference on Smart Grid (icSmartGrid). — IEEE. 2021. — P. 137—142.
50. *Estrada, M. A.* Super-twisting based sliding mode control of hydraulic actuator without velocity state / M. A. Estrada, M. Ruderman, L. Fridman // Control Engineering Practice. — 2024. — Vol. 142. — P. 105739.
51. *Castillo, I.* Describing-function-based analysis to tune parameters of chattering reducing approximations of sliding mode controllers / I. Castillo, L. B. Freidovich // Control Engineering Practice. — 2020. — Vol. 95. — P. 104230.
52. *Super-twisting gain design for transfer heat processes based on identification of parasitic dynamics* / M. Iglesias-Rios [et al.] // 2024 17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). — IEEE. 2024. — P. 13—18.
53. *Boiko, I.* Analysis of chattering in continuous sliding-mode controllers / I. Boiko, L. Fridman // IEEE transactions on automatic control. — 2005. — Vol. 50, no. 9. — P. 1442—1446.
54. *Levant, A.* Robust exact differentiation via sliding mode technique / A. Levant // automatica. — 1998. — Vol. 34, no. 3. — P. 379—384.
55. *Гольдфарб, Л.* К теории систем регулирования с исполнительным механизмом ограниченной скорости / Л. Гольдфарб // Автоматика и телемеханика. — 1961. — Т. 22, № 10. — С. 1324—1332.

56. *Atherton, D.* Nonlinear control engineering-describing function analysis and design / D. Atherton, D. Towill // IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics. — 1977. — Vol. 7, no. 9. — P. 678—678.
57. *Braverman, E.* A small parameter in the problem of justifying the harmonic balance method (in the case of the filter hypothesis). I / E. Braverman, S. Meerkov, E. Pyatnitskii // Automation and Remote Control. — 1975. — Vol. 36, no. 1. — P. 1—16.
58. *Boiko, I.* Input-output analysis of limit cycling relay feedback control systems / I. Boiko // American Control Conference. Vol. 1. — IEEE. 1999. — P. 542—546.
59. *Boiko, I.* Analysis of sliding modes in the frequency domain / I. Boiko // International Journal of Control. — 2005. — Vol. 78, no. 13. — P. 969—981.
60. *Бойко, И. М.* Частотные методы анализа и проектирования систем с разрывным управлением и их применения : доктора технических наук / Бойко Игорь Михайлович. — г. Тула : Тульский государственный университет, 12.2009.
61. Parameter tuning of second-order sliding mode controllers for linear plants with dynamic actuators / I. Boiko [et al.] // Automatica. — 2006. — Vol. 42, no. 5. — P. 833—839.
62. *Martínez-Fuentes, C. A.* Chattering analysis for Lipschitz continuous sliding-mode controllers / C. A. Martínez-Fuentes, U. Pérez-Ventura, L. Fridman // International journal of robust and nonlinear control. — 2021. — Vol. 31, no. 9. — P. 3779—3794.
63. *Pilloni, A.* Oscillation shaping in uncertain linear plants with nonlinear PI control: analysis and experimental results / A. Pilloni, A. Pisano, E. Usai // IFAC Proceedings Volumes. — 2012. — Vol. 45, no. 3. — P. 116—121.
64. Practical stability phase and gain margins concept / Y. Shtessel [et al.] // Advances in Variable Structure Systems and Sliding Mode Control—Theory and Applications. — Springer, 2017. — P. 101—132.
65. *Zhang, Y.* Design of Proportional Gain in Super-Twisting Control for Second-Order Systems With External Disturbances / Y. Zhang, K. Ma // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2025. — Vol. 35, no. 18. — P. 7537—7555.
66. *Rosales, A.* Disturbance attenuation for systems with second-order sliding modes via linear compensators / A. Rosales, I. Boiko // IET Control Theory & Applications. — 2015. — Vol. 9, no. 4. — P. 526—537.
67. *Pérez-Ventura, U.* Design of super-twisting control gains: A describing function based methodology / U. Pérez-Ventura, L. Fridman // Automatica. — 2019. — Vol. 99. — P. 175—180.
68. *Pérez-Ventura, U.* When is it reasonable to implement the discontinuous sliding-mode controllers instead of the continuous ones? Frequency domain criteria / U. Pérez-Ventura, L. Fridman // International Journal of Robust and Nonlinear Control. — 2019. — Vol. 29, no. 3. — P. 810—828.

69. Патент РФ № 2810082 Российская Федерация. МПК В25J 19/02, В23Q 17/22. Система и способ калибровки кинематических параметров роботизированного манипулятора : заявл. 29.12.2022 : опубл. 21.12.2023 / Кульминский Д.Д., Гусев С.В., Суменков О.Ю.; патентообладатель Автономная некоммерческая образовательная организация высшего образования «Научно-технологический университет «Сириус».
70. *Sumenkov, O.* Analytical Parameter Conversion of CPC and POE Models / O. Sumenkov // *IEEE Robotics and Automation Letters*. — 2026. — Vol. 11, no. 2. — P. 1306—1313.
71. *Sumenkov, O.* Practical Aspects of Automated Manipulator Calibration With Plane Constraint / O. Sumenkov // *2025 International Conference on Industrial Engineering, Applications and Manufacturing (ICIEAM)*. — 2025. — P. 924—929.
72. Super-twisting algorithm gain adjustment strategy for manipulator position control / O. Sumenkov [et al.] // *International Conference on Interactive Collaborative Robotics*. Vol. 14898 / ed. by R. A., S. J., M. R. — Cham: Springer, 2024. — P. 15—29. — (Lecture Notes in Computer Science).
73. *Sumenkov, O. Y.* Revisiting the Reaction Curve Based Tuning Method for Continuous Sliding Mode Controllers: Frequency Domain Analysis / O. Y. Sumenkov, T. N. Medvedeva, L. M. Fridman // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2026. — Vol. 22, no. 1. — P. 117—138.
74. *Medvedeva, T. N.* Step-test based procedure for Super-Twisting Algorithm gains adjustment / T. N. Medvedeva, O. Y. Sumenkov, L. M. Fridman // *17th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS)*. — IEEE. 2024. — P. 158—163.
75. *Denavit, J.* A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices / J. Denavit, R. S. Hartenberg // *Journal of Applied Mechanics*. — 1955. — Vol. 22, no. 2. — P. 215—221.
76. Non-kinematic calibration of an industrial robot under multidirectional external loads / K. Kamali [et al.] // *IEEE International Conference on Robotics and Automation*. — 2016.
77. *Žlajpah, L.* Kinematic calibration for collaborative robots on a mobile platform using motion capture system / L. Žlajpah, T. Petrič // *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing*. — 2023. — Vol. 79. — P. 102446.
78. *Wu, C.-H.* The Kinematic Error Model for the Design of Robot Manipulator / C.-H. Wu // *American Control Conference*. — 1983. — P. 497—502.
79. *Zhen, H.* Error analysis of robot manipulators and error transmission functions / H. Zhen // *Proc. of the 15th ISIR, Tokyo*. — 1985. — P. 873—878.
80. *Payannet, D.* Identification and compensation of mechanical errors for industrial robots / D. Payannet, M. Aldon, A. Liegeois // *Proc. 15th Int. Symp. on Industrial Robots*. — 1985. — P. 857—864.
81. *Ibarra, R.* Determination of Linkage Parameter and Pair Variable Errors in Open Chain Kinematic Linkages Using a Minimal Set of Pose Measurement Data / R. Ibarra, N. D. Pereira // *Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design*. — 1986. — June. — Vol. 108, no. 2. — P. 159—166.

82. *Everett, L.* Kinematic modelling for robot calibration / L. Everett, M. Driels, B. Mooring // Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 4. — 1987. — P. 183—189.
83. Research of Calibration Method for Industrial Robot Based on Error Model of Position / T. Chen [et al.] // Applied Sciences. — 2021. — Jan. — Vol. 11. — P. 1287.
84. Kinematics Parameter Calibration of Serial Industrial Robots Based on Partial Pose Measurement / T. Xiang [et al.] // Mathematics. — 2023. — Vol. 11, no. 23. — P. 4802.
85. *Yang, P.* A calibration method for spatial error of industrial robot under variable load conditions based on double-ball rotary structure and three contact displacement sensors / P. Yang, K. Luo, R. Wu // Precision Engineering. — 2024. — Vol. 85. — P. 291—303.
86. *Zhuang, H.* Kinematic Modeling, Identification and Compensation of Robot Manipulators : PhD thesis / Zhuang Hanqi. — USA : Florida Atlantic University, 1989.
87. *Roberts, K.* A new representation for a line / K. Roberts // Proceedings CVPR '88: The Computer Society Conference on Computer Vision and Pattern Recognition. — 1988. — P. 635—640.
88. *Everett, L. J.* The Theory of Kinematic Parameter Identification for Industrial Robots / L. J. Everett, T.-W. Hsu // Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control. — 1988. — Mar. — Vol. 110, no. 1. — P. 96—100.
89. *Everett, L.* A study of kinematic models for forward calibration of manipulators / L. Everett, A. Suryohadiprojo // Proceedings. 1988 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 2. — 1988. — P. 798—800.
90. *Schröer, K.* Complete, minimal and model-continuous kinematic models for robot calibration / K. Schröer, S. L. Albright, M. Grethlein // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 1997. — Vol. 13, no. 1. — P. 73—85.
91. *Gottlieb, D.* Robots and topology / D. Gottlieb // Proceedings. 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 3. — 1986. — P. 1689—1691.
92. *Baker, D. R.* Some topological problems in robotics / D. R. Baker // The Mathematical Intelligencer. — 1990. — Vol. 12. — P. 66—76.
93. Kinematic-parameter identification for serial-robot calibration based on POE formula / R. He [et al.] // IEEE Transactions on Robotics. — 2010. — Vol. 26, no. 3. — P. 411—423.
94. *Park, F.* Computational aspects of the product-of-exponentials formula for robot kinematics / F. Park // IEEE Transactions on Automatic Control. — 1994. — Vol. 39, no. 3. — P. 643—647.
95. *Meng, Y.* Autonomous robot calibration using vision technology / Y. Meng, H. Zhuang // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2007. — Vol. 23, no. 4. — P. 436—446.
96. *Zeng, Y.* Positional error similarity analysis for error compensation of industrial robots / Y. Zeng, W. Tian, W. Liao // Robotics and Computer-Integrated Manufacturing. — 2016. — Vol. 42. — P. 113—120.

97. *Okamura, K.* Kinematic calibration using the product of exponentials formula / K. Okamura, F. C. Park // *Robotica*. — 1996. — Vol. 14. — P. 415—421.
98. *Wu, L.* Geometric interpretation of the general POE model for a serial-link robot via conversion into D-H parameterization / L. Wu, R. Crawford, J. Roberts // 2019 International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — 2019. — P. 7360—7366.
99. *Hollerbach, J. M.* Automatic kinematic calibration using a motion tracking system / J. M. Hollerbach, D. Bennett // *Proceedings of the 4th international symposium on Robotics Research*. — 1988. — P. 191—198.
100. *Schröer, K.* Theory of kinematic modelling and numerical procedures for robot calibration / K. Schröer // *Robot calibration*. — 1993. — Vol. 157196. — P. 44.
101. Kinematic-Parameter Identification for Serial-Robot Calibration Based on POE Formula / R. He [et al.] // *IEEE Transactions on Robotics*. — 2010. — Vol. 26, no. 3. — P. 411—423.
102. Fast kinematic re-calibration for industrial robot arms / S. Kana [et al.] // *Sensors*. — 2022. — Vol. 22, no. 6. — P. 2295.
103. *Gautier, M.* Exciting trajectories for inertial parameters identification / M. Gautier, W. Khalil // *Int. J. of Robotics Research*. — 1992. — Vol. 11, no. 4. — P. 362—375.
104. An experimental robot load identification method for industrial application / J. Swevers [et al.] // *The International Journal of Robotics Research*. — 2002. — Vol. 21, no. 8. — P. 701—712.
105. *Khalil, W.* Identification of the payload inertial parameters of industrial manipulators / W. Khalil, M. Gautier, P. Lemoine // *Proceedings 2007 IEEE International Conference on Robotics and Automation*. — IEEE. 2007. — P. 4943—4948.
106. *Jubien, A.* Dynamic identification of the Kuka LWR robot using motor torques and joint torque sensors data / A. Jubien, M. Gautier, A. Janot // *IFAC Proceedings Volumes*. — 2014. — Vol. 47, no. 3. — P. 8391—8396.
107. *Gaz, C.* Extracting feasible robot parameters from dynamic coefficients using nonlinear optimization methods / C. Gaz, F. Flacco, A. De Luca // 2016 IEEE international conference on robotics and automation (ICRA). — IEEE. 2016. — P. 2075—2081.
108. An integrated two-level self-calibration method for a cable-driven humanoid arm / Q. Chen [et al.] // *IEEE Transactions on Automation Science and Engineering*. — 2013. — Vol. 10, no. 2. — P. 380—391.
109. *Alici, G.* Enhanced stiffness modeling, identification and characterization for robot manipulators / G. Alici, B. Shirinzadeh // *IEEE transactions on robotics*. — 2005. — Vol. 21, no. 4. — P. 554—564.
110. *Mikhel, S. K.* Stiffness Model Reduction for Manipulators with Double Encoders: Algebraic Approach / S. K. Mikhel, A. S. Klimchik // *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*. — 2021. — Vol. 17, no. 3. — P. 347—360.
111. *Gong, C.* A Self-Calibration Method for Robotic Measurement System / C. Gong, J. Yuan, J. Ni // *Journal of Manufacturing Science and Engineering*. — 1999. — June. — Vol. 122, no. 1. — P. 174—181.

112. Autonomous Kinematic Calibration of the Robot Manipulator with a Linear Laser-Vision Sensor / H.-J. Kang [et al.] // Advanced Intelligent Computing Theories and Applications. With Aspects of Artificial Intelligence. Vol. 4682. — Springer, Berlin, Heidelberg, 2007. — P. 1102—1109. — (Lecture Notes in Computer Science).
113. *Everett, L. J.* Forward Calibration of Closed-Loop Jointed Manipulators / L. J. Everett // The International Journal of Robotics Research. — 1989. — Vol. 8, no. 4. — P. 85—91.
114. Патент № 2605393 Российская Федерация, МПК В25J 9/16 (2006.01). Способ калибровки и программирования робота : № 2014107813/02 : заявл. 18.09.2012 : опубл. 20.12.2016 / Сеэ-Кнудсен Р., Эстергаард Э.Х., Петерсен Х.Г. ; заявитель "Юниверсал Роботс А/С" (ДК). — 43 с.
115. Патент № 2719207 Российская Федерация, МПК В25J 9/16 (2006.01). Способ калибровки кинематических параметров многостепенных манипуляторов : № 2019133257 : заявл. 10.17.2019 : опубл. 04.17.2020 / Губанков А.С., Юхимец Д.А., Климчик А.С. ; заявитель АНО ВО "Университет Иннополис" (RU). — 11 с.
116. *Tang, G.-R.* Plane-motion approach to manipulator calibration / G.-R. Tang, B. Mooring // The International Journal of Advanced Manufacturing Technology. — 1992. — Vol. 7, no. 1. — P. 21—28.
117. *Tang, Z.* Autonomous calibration research of polishing robot / Z. Tang, Z. Niu, X. Liu // 2006 6th World Congress on Intelligent Control and Automation. Vol. 2. — IEEE. 2006. — P. 8938—8942.
118. Robot kinematic calibration with plane constraints based on POE formula / R. Wang [et al.] // 2016 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA). — IEEE. 2016. — P. 1887—1892.
119. *Gaudreault, M.* Local and closed-loop calibration of an industrial serial robot using a new low-cost 3D measuring device / M. Gaudreault, A. Joubair, I. A. Bonev // 2016 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA). — IEEE. 2016. — P. 4312—4319.
120. *Лукьянов, А. Г.* Методы сведения уравнений динамических систем к регулярной форме / А. Г. Лукьянов, В. И. Уткин // Автоматика и телемеханика. — 1981. — № 4. — С. 5—13.
121. *Уткин, В. И.* Системы управления с векторными реле / В. И. Уткин, Ю. В. Орлов // Автоматика и телемеханика. — 2019. — № 9. — С. 143—155.
122. *Gutman, S.* Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty / S. Gutman, G. Leitmann // 1976 IEEE Conference on Decision and Control including the 15th Symposium on Adaptive Processes. — IEEE. 1976. — P. 94—99.
123. *Guldner, J.* The chattering problem in sliding mode systems / J. Guldner, V. Utkin // Proc. 14th Int. Symp. of Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS). — 2000.
124. *Bartolini, G.* Output tracking control of uncertain nonlinear second-order systems / G. Bartolini, A. Ferrara, E. Usai // Automatica. — 1997. — Vol. 33, no. 12. — P. 2203—2212.
125. *Levant, A.* Homogeneity approach to high-order sliding mode design / A. Levant // Automatica. — 2005. — Vol. 41, no. 5. — P. 823—830.

126. *Boiko, I.* Analysis of second-order sliding-mode algorithms in the frequency domain / I. Boiko, L. Fridman, M. I. Castellanos // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2004. — Vol. 49, no. 6. — P. 946—950.
127. *Craig, J. J.* Introduction to robotics: mechanics and control, 3/E / J. J. Craig. — Pearson Education India, 2009.
128. *Hayati, S.* Improving the absolute positioning accuracy of robot manipulators / S. Hayati, M. Mirmirani // Journal of Robotic Systems. — 1985. — Vol. 2, no. 4. — P. 397—413.
129. *Hayati, S. A.* Galileo Spacecraft High Gain Antenna Offset Calibration / S. A. Hayati // 1982 American Control Conference. — 1982. — P. 1082—1087. — DOI: 10.23919/ACC.1982.4788024.
130. *Broderick, P. L.* A Method for Determining and Correcting Robot Position and Orientation Errors Due to Manufacturing / P. L. Broderick, R. J. Cipra // Journal of Mechanisms, Transmissions, and Automation in Design. — 1988. — Mar. — Vol. 110, no. 1. — P. 3—10.
131. *Warner, F.* Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups / F. Warner. — Springer, 1983. — (Graduate Texts in Mathematics).
132. Classical mechanics. Vol. 2 / H. Goldstein, C. P. Poole, J. Safko, [et al.]. — Addison-wesley Reading, MA, 1950.
133. *Sun, Y.* Observability index selection for robot calibration / Y. Sun, J. M. Hollerbach // IEEE International Conference on Robotics and Automation. — 2008. — P. 831—836.
134. *Joubair, A.* Comparison of the efficiency of five observability indices for robot calibration / A. Joubair, I. A. Bonev // Mechanism and Machine Theory. — 2013. — Vol. 70. — P. 254—265.
135. A product-of-exponential-based robot calibration method with optimal measurement configurations / G. Xiong [et al.] // International Journal of Advanced Robotic Systems. — 2017. — Vol. 14, no. 6. — P. 1729881417743555.
136. *Chen, T.* A Novel Industrial Robot Calibration Method Based on Multi-Planar Constraints / T. Chen, S. Li // 2023 IEEE International Conference on Systems, Man, and Cybernetics (SMC). — 2023. — P. 4046—4051. — DOI: 10.1109/SMC53992.2023.10394495.
137. Visual-Biased Observability Index for Camera-Based Robot Calibration / S. Shirafuji [et al.] // Journal of Mechanisms and Robotics. — 2024. — Vol. 16, no. 5.
138. *Piepmeyer, J. A.* A dynamic quasi-Newton method for uncalibrated visual servoing / J. A. Piepmeyer, G. V. McMurray, H. Lipkin // IEEE International Conference on Robotics and Automation. Vol. 2. — IEEE. 1999. — P. 1595—1600.
139. *Khalil, W.* Identifiable parameters and optimum configurations for robots calibration / W. Khalil, M. Gautier, C. Enguehard // Robotica. — 1991. — Vol. 9, no. 1. — P. 63—70.
140. *Borm, J.-H.* Determination of optimal measurement configurations for robot calibration based on observability measure / J.-H. Borm, C.-H. Meng // The International Journal of Robotics Research. — 1991. — Vol. 10, no. 1. — P. 51—63.

141. *Sun, Y.* Observability index selection for robot calibration / Y. Sun, J. M. Hollerbach // 2008 IEEE international conference on robotics and automation. — IEEE. 2008. — P. 831—836.
142. *Joubair, A.* Comparison of the efficiency of five observability indices for robot calibration / A. Joubair, I. A. Bonev // Mechanism and Machine Theory. — 2013. — Vol. 70. — P. 254—265.
143. Visual-biased observability index for camera-based robot calibration / S. Shirafuji [et al.] // Journal of Mechanisms and Robotics. — 2024. — Vol. 16, no. 5. — P. 051010.
144. *Boiko, I.* Non-parametric tuning of PID controllers / I. Boiko // Non-parametric Tuning of PID Controllers: A Modified Relay-Feedback-Test Approach. — Springer, 2013. — P. 9—23.
145. *Moreno, J. A.* Strict Lyapunov functions for the super-twisting algorithm / J. A. Moreno, M. Osorio // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2012. — Vol. 57, no. 4. — P. 1035—1040.
146. *Polyakov, A.* Reaching time estimation for «super-twisting» second order sliding mode controller via Lyapunov function designing / A. Polyakov, A. Poznyak // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2009. — Vol. 54, no. 8. — P. 1951—1955.
147. *Seeber, R.* Stability proof for a well-established super-twisting parameter setting / R. Seeber, M. Horn // Automatica. — 2017. — Vol. 84. — P. 241—243.
148. *Seeber, R.* Necessary and sufficient stability criterion for the super-twisting algorithm / R. Seeber, M. Horn // 2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). — IEEE. 2018. — P. 120—125.
149. *Fomichev, V.* Stability criterion and sharp estimates for the “super-twisting” algorithm / V. Fomichev, A. Vysotskii // Differential Equations. — 2023. — Vol. 59, no. 2. — P. 260—264.
150. *Moreno, J. A.* A linear framework for the robust stability analysis of a generalized super-twisting algorithm / J. A. Moreno // 2009 6th International Conference on Electrical Engineering, Computing Science and Automatic Control (CCE). — IEEE. 2009. — P. 1—6.
151. Control System Design / G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado, [et al.]. — Prentice Hall Upper Saddle River, 2001.
152. *Braverman, E.* A small parameter in the problem of justifying the harmonic balance method (in the case of the filter hypothesis). II / E. Braverman, S. Meerkov, E. Pyatnitskii // Automation and Remote Control. — 1975. — Vol. 36, no. 2. — P. 189—196.
153. *Loeb, J.* Recent advances in nonlinear servo theory / J. Loeb // Transactions of the American Society of Mechanical Engineers. — 1954. — Vol. 76, no. 8. — P. 1281—1288.
154. *Boiko, I. M.* On Loeb’s criterion of orbital stability of self-excited periodic motions / I. M. Boiko // 2018 15th International Workshop on Variable Structure Systems (VSS). — 2018. — P. 464—469.
155. *Khalil, H. K.* Nonlinear Systems / H. K. Khalil. — 3rd. — Upper Saddle River, NJ : Prentice Hall, 2002.
156. *Levant, A.* Accuracy of homogeneous sliding modes in the presence of fast actuators / A. Levant, L. M. Fridman // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2010. — Vol. 55, no. 3. — P. 810—814.

157. *Cruz-Zavala, E.* Uniform robust exact differentiator / E. Cruz-Zavala, J. A. Moreno, L. M. Fridman // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2011. — Vol. 56, no. 11. — P. 2727—2733.
158. *Boiko, I.* Analysis of orbital stability in lure system, based on dynamic harmonic balance / I. Boiko // Journal of the Franklin Institute. — 2017. — Vol. 354, no. 12. — P. 4826—4837.
159. *Papageorgiou, D.* On the behaviour of under-tuned super-twisting sliding mode control loops / D. Papageorgiou, C. Edwards // Automatica. — 2022. — Vol. 135. — P. 109983.
160. *Refosco, P. A.* Conditions for boundedness of under-tuned super-twisting sliding mode control loops / P. A. Refosco, C. Edwards, D. Papageorgiou // IEEE Transactions on Automatic Control. — 2026.
161. Super-Twisting gain maps based on parasitic dynamics identification / M. Iglesias-Rios [et al.] // Control Engineering Practice. — 2025. — Vol. 165. — P. 106609.
162. *ABB.* Application Manual: Controller Software IRC5 / ABB ; ABB Robotics. — Västerås, Sweden, 2006. — Page 412.
163. *Artstein, Z.* Linear systems with delayed controls: A reduction / Z. Artstein // IEEE Transactions on Automatic control. — 1982. — Vol. 27, no. 4. — P. 869—879.
164. Closed-loop control of dead time systems via sequential sub-predictors / M. Najafi [et al.] // International Journal of Control. — 2013. — Vol. 86, no. 4. — P. 599—609.
165. *Zhu, Y.* Sub-predictors for network-based control under uncertain large delays / Y. Zhu, E. Fridman // Automatica. — 2021. — Vol. 123. — P. 109350.